Robert Ivo MEI, Aachen

Rechenkniffe und Monsterterme in der Mathematik für Ingenieure

Vergleicht man universitäre Mathematik-Aufgaben aus Anfangsvorlesungen in reinen Mathematikstudiengängen mit solchen in Ingenieurstudiengängen, so fällt auf, dass bei letzteren oft längere Terme verwendet werden und häufiger spezielle Kniffe zur Lösung nötig sind. Dieser Beitrag beschäftigt sich mit Gründen für dieses Phänomen, didaktischen Problemen, die sich daraus ergeben können, und möglichen Konsequenzen zum Umgang damit in der Lehre.

1. Beispiele für Rechenkniffe und Monsterterme

Was hier unter „Rechenkniffen“ und „Monstertermen“ verstanden wird, ist am besten an Beispielen zu veranschaulichen. Zunächst für Rechenkniffe:

Erweiterungstrick:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n^2-n}-n = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n^2-n}-n\right)\left(\sqrt{n^2-n}+n\right)}{\sqrt{n^2-n}+n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(n^2-n\right)-n^2}{\sqrt{n^2-n}+n}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{-n}{\sqrt{n^2-n}+n} = \lim_{n\to\infty}\frac{-1}{\sqrt{1-\frac{1}{n}}+1} = -\frac{1}{2}$$

Päckchen-Packen:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^3(x)}{2x^2\sin(x)\cos(x)+x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin^3(x)}{x^3}}{2\cdot\frac{\sin(x)}{x}\cdot\cos(x)+1} = \frac{1}{2\cdot 1\cdot 1+1} = \frac{1}{3}$$

Der Kniff tritt jeweils gleich bei der ersten Umformung auf und ist für die Lösung praktisch unverzichtbar. Der zweite Grenzwert lässt sich zwar beispielsweise auch mit der Regel von L'Hospital finden, dies nimmt jedoch deutlich mehr Zeit in Anspruch und ist fehleranfälliger. In Unterscheidung zu „normalen“ mathematischen Werkzeugen wie dem Gleichnamigmachen von Brüchen lässt sich charakterisieren: Rechenkniffe sind mathematische Werkzeuge, die bei wenigen speziellen Aufgabentypen vorkommen, dort aber für die Lösung praktisch unverzichtbar sind. Ein Beispiel für einen Monsterterm liegt etwa vor, wenn die durch

$$\operatorname{Im}(iz(\bar{z}-2)) \le \operatorname{Im}\left(3i\left(z^2+1\right)\right)-3\left(\operatorname{Im}(iz)\right)^2 \textbf{ und } \left(\operatorname{Re}(\bar{z}(z-2i))-2\operatorname{Re}(z)\right)\cdot\operatorname{Re}\left(\frac{1}{iz}\right)\ge 0,\ z\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$$

gegebene Menge komplexer Zahlen bestimmt und skizziert werden soll. Charakterisieren kann man Monsterterme dadurch, dass sie länger sind, als es zum Nachweis der geprüften Fähigkeit nötig wäre.

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

2. Gründe für diese Ausprägung der Ingenieurmathematik

Woher stammt diese Schwierigkeit, die sich u. a. in Kniffen und großen Termen äußert? Historisch ist sicherlich die Akademisierung des Ingenieurwesens zum Ende des 19. Jahrhunderts zu nennen (vgl. Kessel et al. 2008, S. 1). Zudem sind Gründlichkeit und Beachtung von Extremfällen ohne Zweifel sinnvolle Fähigkeiten für Ingenieure. Insbesondere große Terme können Übersicht, Kalkülsicherheit etc. prüfen; zudem ergeben sie sich ganz natürlich in Anwendungskontexten.

3. Mögliche didaktische Probleme

Bei verstärkter Behandlung von Kniffen und großen Termen können sich aber didaktische Probleme ergeben, was nun anhand einiger Studentenlösungen zu einer Klausuraufgabe aus der Ingenieurmathematik demonstriert wird. Die Aufgabe erforderte keine Kniffe, in altem Übungsmaterial waren diese jedoch noch häufig. Dadurch traten Effekte der Behandlung von Rechenkniffen recht deutlich hervor. Die Klausuraufgabe lautete wie folgt:

Für $\beta \in \mathbb{R}$ sei

$$f_\beta(x) = \begin{cases} x\left(\cos(2x) - 1\right) & , \ 0 < x \\ \beta \cdot \dfrac{x\cos(x) - \sin(x)}{x^2} & , \ x < 0. \end{cases}$$

(i) Zeigen Sie, dass f_β in $x_0 = 0$ mit dem Wert 0 stetig ergänzbar ist.

(ii) Für welche $\beta \in \mathbb{R}$ ist die in (i) stetig ergänzte Funktion $\tilde{f}_\beta$ in $x_0 = 0$ differenzierbar?

Die einfachste Lösung benutzt links- und rechtsseitige Grenzwertbildung, Einsetzen und die Regel von L'Hospital. Wie haben es Studenten gelöst? Neben vielen richtigen, einfach gehaltenen Lösungen gab es verbreitete Schwierigkeiten. Dazu vier Beispiele:

1)
$$\lim_{x\downarrow 0} f_\beta(x) = \lim_{x\downarrow 0}\left(x\cos(2x) - x\right) = \lim_{x\downarrow 0}\left(x\cos(2x) - x\right) = \lim_{x\downarrow 0}\left(\left(\cos^2(x) - \sin^2(x) - 1\right)x\right)$$
$$= \lim_{x\downarrow 0}\left(1 - \sin^2(x) - \sin^2(x) - 1\right)x = \lim_{x\downarrow 0} -2\cdot\frac{\sin^2(x)}{x^2}\cdot x^3 = -2\cdot 1\cdot 1\cdot 0 = 0$$

2)
$$\lim_{x\uparrow 0}\beta\cdot\frac{x\cdot\cos x - \sin x}{x^2} = \lim_{x\uparrow 0}\beta\cdot\frac{x\cdot\dfrac{x\frac{\sin x}{x}}{x\frac{\tan x}{x}} - x\cdot\dfrac{\sin x}{x}}{x\cdot x}\left(= \lim_{x\uparrow 0}\beta\cdot\frac{\text{"}0\text{"}}{0}\right)$$
$$= \lim_{x\uparrow 0}\beta\cdot\frac{x\cdot\sqrt{1-\sin^2 x} - \sin x}{x^2} = \lim_{x\uparrow 0}\beta\cdot\frac{x\cdot\sqrt{1 - x\cdot\frac{\sin x}{x}\cdot x\cdot\frac{\sin x}{x}} - x\cdot\frac{\sin x}{x}}{x\cdot x} = 0$$

3)
$$\lim_{x\uparrow 0} f(x) = \lim_{x\uparrow 0}\beta\cdot\frac{x\cdot\cos x - \sin x}{x^2} = \lim_{x\uparrow 0}\beta\cdot\left(\underbrace{\frac{\cos x}{x}}_{\to 1} - \underbrace{\frac{\sin x}{x^2}}_{\to 1}\right) = \frac{0\cdot\beta}{1} = 0$$

4)
$$\lim_{x\uparrow 0}\left|\frac{\widetilde{f_\beta}(x)-\widetilde{f_\beta}(0)}{x-0}\right| = \lim_{x\uparrow 0}\left|\beta\cdot\frac{x\cdot\cos x-\sin x}{x^3}\right| \qquad \text{"}\tfrac{0}{0}\text{"} \quad \text{L'Hospital}$$
$$= \lim_{x\uparrow 0}|\beta|\cdot\left|\frac{\cos x - x\cdot\sin x-\cos x}{3x^2}\right| = \lim_{x\uparrow 0}|\beta|\cdot\left|\frac{-\sin x}{3x}\right| \qquad \text{"}\tfrac{0}{0}\text{"} \quad \text{L'H}$$
$$= \lim_{x\uparrow 0}|\beta|\cdot\left|\frac{-\cos x}{3}\right| = |\beta|\cdot\tfrac{1}{3} \stackrel{!}{=} 0 \quad\Rightarrow\quad \beta = 0$$

In den Beispielen 1)–3) fällt ein Hang zur Anwendung von Rechenkniffen auf (Päckchen-Packen, Additionstheoreme, in nicht abgebildeten Beispielen auch der Mittelwertsatz). In 1) und 2) wurde dadurch die Aufgabe unnötig erschwert. Durch lange Rechnungen wurde in beiden Fällen Prüfungszeit verloren. Auffällig ist aber auch, dass hier die grundlegenden Fähigkeiten in Kalkül und Schulstoff vorhanden sind, und dass durchaus etwas gelernt wurde. So wurde in 1) fehlerfrei umgeformt und der Grenzwert bestimmt, auch scheint das Grenzwertkonzept verstanden zu sein. Bei 3) tritt dagegen ein echter Fehler auf, die Anwendung des Päckchen-Packens wird übergeneralisiert. Bei den Beträgen im letzten Beispiel 4) liegt vermutlich eine Verwechslung mit der notwendigen Betragssetzung bei der (ε,δ)-Definition von Funktionsgrenzwerten vor. Insgesamt scheint es in den Beispielen trotz teils weitentwickelter Fähigkeiten an einem Gespür dafür zu mangeln, wann sich welche Lösungsverfahren (besser) eignen.

4. Vermutungen zu den Ursachen der gezeigten Schwierigkeiten

Die gezeigten und ähnliche Schwierigkeiten traten zu oft auf, um nur als Einzelfälle gelten zu können. Woher kam in diesen Fällen die Fixierung auf Rechenkniffe? Bei einigen mag dies an verschleppten Mängeln aus der Schulzeit gelegen haben (vgl. auch Kersten 2014). Ich vermute aber aufgrund der meist sicheren Kalkülbeherrschung, dass eine problematische Lernhaltung zur universitären Mathematik eine Rolle gespielt hat (vgl. Rooch et al. 2013, S. 399). Diese Haltung ist charakterisiert durch

- verschobene Prioritäten, bei denen auf Rechenkniffe mehr Wert gelegt wird als auf eigenständiges Lösen von (zunächst einfachen) Aufgaben; möglicherweise auch verbunden mit dem Gefühl, dass Aufgaben im Allgemeinen nicht ohne Kniffe zu bewältigen sind,
- die Erwartung, durch (Auswendig-)Lernen von Musterlösungen zu Übungsaufgaben ausreichend vorbereitet zu sein,
- ein Bild von Mathematik als mit Kniffen zu bezwingendem Gegner – man denke auch an den Begriff des „Kampfrechnens“.

Welchen Einfluss hat die Gestaltung der Mathematiklehre auf diese Einstellung? Hier kommen die Rechenkniffe und Monsterterme wieder ins Spiel: Bei einer Überbetonung von Aufgaben, die nur mit Kniffen lösbar sind, ist die beschriebene Lernhaltung nicht verwunderlich. Monsterterme in Übungsaufgaben wirken zusätzlich als Katalysator; sie können es durch ihre Länge schwerer machen, sich auf das grundlegende Verständnis von Konzepten zu konzentrieren.

5. Folgerungen für die Lehre

Da die Beispiele von durchaus motivierten und lernfähigen Studenten zu stammen scheinen, ist zu überlegen, wie man diese bei einem effektiveren Lernen unterstützen kann, ohne insgesamt die Anforderungen zu senken. Grundüberlegung ist es nach dem vorigen Abschnitt, Rechenkniffe und Monsterterme nicht zu häufig in Aufgaben einzuflechten. Das betrifft weniger Vorlesungen selbst (in denen üblicherweise Konzepte grundlegend und mit einfachen Beispielen gelehrt werden), sondern Übungs- und Klausuraufgaben. Studenten sollten nicht das Gefühl bekommen, dass man diese kaum ohne Tricks lösen kann. Dieselbe Überlegung spricht für das Einbauen von einigen Aufgaben in Übungen und Prüfungen, die grundlegenderes Konzeptverständnis behandeln. Mit solchen Aufgaben ist es auch besser möglich, Studenten in Kleingruppenübungen auf nicht-frontale Weise einzubeziehen; denn bei hauptsächlich trickreichen Aufgaben müssen allzu oft doch die Tutoren Musterlösungen frontal an der Tafel entwickeln. Um wiederum bei den (insgesamt nicht verzichtbaren) schwierigen Aufgaben mögliche Anfangshürden zu verringern, werden derzeit unter Mitwirkung des Autors E-Learning-Aufgaben mit antwortabhängiger Verzweigung entwickelt (vgl. Mei 2013). Ziel ist es dabei, den Sprung vom Nachvollziehen von Musterlösungen hin zum eigenständigeren, korrekten Bearbeiten komplexer schriftlicher Aufgaben überwindbarer zu gestalten.

Literatur

Kersten, I. (2014): *Kalkülfertigkeiten an der Universität: Mängel erkennen und Konzepte für die Förderung entwickeln*. In J. Roth et al. (Hrsg.), Übergänge konstruktiv gestalten (S. 33-49). Wiesbaden: Springer Spektrum.

Kessel, M., Kessel, T. (2008): *Zur Bedeutung der Mathematik im Studium des Bauingenieurwesens*. http://www.ibholz.tu-bs.de/dat/Veranstaltungen/Bedeutung_der_Mathematik.pdf (Letzter Aufruf: 07.04.2015)

Mei, R. (2013): *Elektronische Hausaufgaben in den Mathematik-Vorlesungen für Bauingenieure: Motivation, Entwicklung, Ersteinsatz und Evaluation*. Staatsexamensarbeit an der RWTH Aachen im Dezember 2013.

Rooch, A., Härterich, J., Kiss, C. (2013): *Brauchen Ingenieure Mathematik? Wie Praxisbezug Ansichten über das Pflichtfach Mathematik verändert*. In I. Bausch et al. (Hrsg.), Mathematische Vor- und Brückenkurse: Konzepte, Probleme und Perspektiven (S. 398-409). Wiesbaden: Springer Spektrum.