

Alexander MEYER, Dortmund

Individuelle Aneignungswege zum Distributivgesetz

Die Einführung des Umformens algebraischer Terme kann über die Einbeziehung verschiedener Anschauungsmittel so erfolgen, dass Schülerinnen und Schülern ein sinnstiftender Zugang zum Umformen ermöglicht wird (Kieran, 2011). Um algebraische Terme und deren Umformung anknüpfungsfähig für spätere Inhalte zu machen, müssen die Umformungsregeln, die zuvor anschaulich eingeführt wurden, eingeübt werden. Hierfür sind produktive Übungsformate nötig. Diese wurden jedoch bisher nicht systematisch generiert und in ihrer Wirkung beforscht.

Einzelne Maßnahmen für das produktive Üben des Umformens sind auf ihre Wirkung beforscht:

- das Wahrnehmen von Termmerkmalen durch das systematische Betrachtungen von Unterschieden und Gemeinsamkeiten zwischen Termen (Mason, 2004);
- das Sehen von Strukturen durch das systematische Herstellen von Beziehungen zwischen den Elementen/Teiltermen eines Terms (Rüede, 2012);
- das Anknüpfen an Kontexte und bekannte Anschauungsmittel, da diese das Sehen von Strukturen anbahnen (Zwetzschler, 2015; Drouhard & Teppo, 2004);
- das gemeinsame Aushandeln von Termmerkmalen und Strukturen im (Unterrichts-)Diskurs (Caspi & Sfard, 2012).

Die Maßnahmen für das produktive Üben wurden bisher nicht in einer Übungseinheit miteinander vernetzt. Eine solche Vernetzung der Maßnahmen in einer Übungseinheit hat jedoch das Potential, durch die verschiedenen integrierten Maßnahmen Lernende dazu zu befähigen, eine Umformungsregel auf bisher unbekannte und strukturell andersartige Terme anzuwenden. Hier wird eine Übungseinheit aus drei Übungsaufgaben vorgestellt, die eine solche Vernetzung leisten soll.

1. Gewinnung produktiver Übungsaufgaben

Das Modell der didaktischen Rekonstruktion dient dazu, Übungsaufgaben zum Umformen algebraischer Terme zu rekonstruieren. Dabei wurde sich auf produktive Übungsformate zum Distributivgesetz beschränkt. Die *Klärung der Lernendenperspektiven* zeigt auf, dass Lernende Ressourcen für das Umformen algebraischer Terme insofern haben, als dass sie Kontext – und Sachbezüge heranziehen und auf diese Weise Zugang zur Struktur von

Termen gewinnen können (Drouhard & Teppo 2004). Bestimmte Elemente in den Übungsaufgaben können Lernenden dazu verhelfen, Unterschiede und Gemeinsamkeiten zwischen Termen zu sehen. Beispielsweise kann eine Tabelle ein Anlass sein, gemeinsame Merkmale in Umformungen zu finden und die Umformungen entsprechend in der Tabelle zu ordnen (Meyer, 2014). Im Fokus der Studie steht die genauere Aufdeckung der Lernendenperspektiven, um so Übungsaufgaben (weiter) zu entwickeln.

In der *fachlichen Klärung* zeigt sich, dass im Wesentlichen die vier bereits genannten Elemente den Fachgegenstand konstituieren. Hierbei wird jedoch vorausgesetzt, dass in den Übungsformaten der Aspekt der Verallgemeinerung, der durch algebraische Terme möglich wird, noch nicht im Fokus steht.

Der *rekonstruierte Lerngegenstand* zeigt sich in der Übungsaufgabe 2 (Abb. 1) der Übungseinheit prototypisch. Durch das operative Prinzip (Wittmann, 1985) werden Lernende Term für Term an neue strukturelle Aspekte von Termen herangeführt: Indem in jedem folgenden Term bestimmte Elemente der Terme variiert sind und eine prototypische Formulierung des Distributivgesetzes als Strukturierungshilfe gegeben ist, können Lernende Unterschiede und Gemeinsamkeiten zwischen dem vorliegenden Term, vorigen Termen und der prototypischen Formulierung wahrnehmen.

b)	$ab + ac = a(b + c)$
	$5ab + 2a =$
Weiterer Term:	

Abbildung 1: Beispielterm aus Aufgabe 2 der Übungseinheit

2. Empirische Studie zur Erprobung der produktiven Übungsaufgaben

Die drei didaktisch rekonstruierten produktiven Übungsaufgaben wurden in zwei Iterationen im Unterricht erprobt. In der finalen Iteration haben sechs Interviewer/Förderlehrer die Aufgaben in Schülergruppen zu je zwei Schülerinnen bzw. Schülern eingesetzt. Diese Fördersitzungen wurden videografiert und das entstehende Material transkribiert. Die Fördersitzungen dauerten jeweils 90 Min.

Um sicherzustellen, dass die teilnehmenden Lernenden die nötigen Lernvoraussetzungen in elementarer Algebra, etwa tragfähige Variablenvorstellungen, mitbringen, wurde ihr Vorwissen zuvor diagnostisch erhoben. Die Lernenden kommen aus der 8 Klasse und haben im Unterricht zuvor die Umformungsregeln zur Algebra kennen gelernt.

Die Transskripte und das Material der Sitzungen wurden qualitativ sequenzanalytisch analysiert. Dabei diente das Modell der Grundstruktur als „sensitizing concept“, wobei Grundstrukturen die von individuellen Lernenden wahrgenommenen Beziehungen zwischen Termelementen sind (Meyer, 2014). Das Umformen eines algebraischen Terms wird gemäß des Modells der Grundstrukturen durch das Aufeinander-Beziehen von Vorstellungen zu Umformungsregeln und Grundstrukturen modelliert. Eine wahrgenommene Beziehung (die Grundstruktur) kann zur Identifikation einer Umformungsmöglichkeit führen. Gleichzeitig kann die Kenntnis der Umformungsregel zur Wahrnehmung einer Beziehung in einem Term führen, d.h. zur Wahrnehmung einer Grundstruktur. Beide Prozesse sind somit in der Tätigkeit des Umformens dialektisch aufeinander bezogen.

3. Einblick in einen Aneignungsweg zum Distributivgesetz

Im folgenden wird illustriert, welche Ressourcen sich Lernende in der gezeigten Aufgabe aneignen, um das Distributivgesetz auf einen bisher unvertrauten Term anzuwenden. Ali und Marc formen den Term $5ab+2a$ zu $7a+b$ um. Sie begründen ihre Umformung mit „Weil sie denselben Kern haben plus rechnen“. Hier nehmen Ali und Marc im Ursprungsterm ein gemeinsames Merkmal in den Teiltermen $5ab$ und $2a$ wahr. Diese wahrgenommene Beziehung leitet sie an, beide Teilterme zu addieren.

Im Verlauf der Aufgabenbearbeitung zeigt sich, dass Ali und Marc verschiedene Grundstrukturen im Term sehen können, indem sie die verschiedenen möglichen Beziehungen der Teilterme untereinander wahrnehmen. Zugleich sind sie sich der verschiedenen Umformungsmöglichkeiten bewusst, die aufgrund dieser Beziehungen in Reichweite liegen. Sie können so anhand der Beziehungen Umformungsmöglichkeiten unterscheiden.

63 Marc: [...] Weil die Terme, zum Beispiel zwei unterschiedliche Terme, können nicht addiert werden aber ähm multipliziert [werden] können sie.

Hier wird deutlich, dass anhand des vorliegenden Terms und den Beziehungen, die darin gesehen wurden, die Vorstellung einer allgemeinen Umformungsregel entsteht. Die Anwendung des Distributivgesetzes wird hier nun als „Multiplikation“ angesehen und allgemein formuliert.

Gemäß der ersten qualitativen Analysen scheint die Übungsaufgabe den Lernenden dazu zu verhelfen, ihre Aktivitäten des Wahrnehmens von Grundstrukturen und der Anwendung von Umformungsregeln stärker aufeinander zu beziehen. Ali und Marc werden im Verlauf der Übungsaufgabe in die Lage versetzt, eine wahrgenommene Beziehung zu präzisieren und so verschiedene Umformungsmöglichkeiten zu unterscheiden.

4. Zusammenfassung und Diskussion

Die ersten Analysen der Umformungsaktivitäten der Lernenden in den produktiven Übungsaufgaben zeigen, dass die Übungsaufgaben Lernenden dazu verhelfen, ihre Umformungen an den Merkmalen eines Terms auszurichten und so das Distributivgesetz mathematisch tragfähig auf einen bisher unbekanntem Term anzuwenden. Dabei zeigt sich, dass Lernende im Verlauf der Übungsaufgaben die Anwendung von Umformungsregeln flexibilisieren, etwa indem eine wahrgenommene Grundstruktur nun nicht mehr nur mit einer Umformung assoziiert wird, sondern das Nachdenken über verschiedene Umformungsmöglichkeiten einleitet. Ein weiterer Aneignungsweg in einer anderen Schülergruppe kennzeichnet sich dadurch, dass Lernende zum Distributivgesetz passende Grundstrukturen immer stärker mit dem Distributivgesetz verzahnen, d.h. verstärkt Grundstrukturen als Begründungen für Umformungen nutzen, was dazu beiträgt, dass diese zunehmend tragfähig werden.

Literatur

- Caspi, S., & Sfard, A. (2012). Spontaneous meta-arithmetic as a first step toward school algebra. *International Journal of Educational Research*, 51-52, 45–65.
- Drouhard, J.-P., & Teppo, A. R. (2004). Symbols and Language. In K. Stacey, H. Chick, & M. Kendal, *The Future of the Teaching and Learning of Algebra*. (pp. 227–264). Norwood, MA.
- Kieran, C. (2011). Overall Commentary on Early Algebraization: Perspectives for Research and Teaching. In *Towards Equity in Mathematics Education* (pp. 579–593). Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg.
- Mason, J. (2004). *Doing ≠ construing and doing + discussing ≠ learning: The importance of the structure of attention*. Paper presented as a regular lecture at the 10th International Congress of Mathematics Education.
- Meyer, A. (2014). Students' manipulation of algebraic expressions as ‚recognizing basic structures' and ‚giving relevance'. In Liljedahl, P., Oesterle, S., Nicol, C., & Allan, D. (Eds.) *Proceedings of the Joint Meeting of PME 38 and PME-NA 36* (Vol. 4, pp. 209-216), PME: Vancouver.
- Rüede, C. (2012). Strukturieren eines algebraischen Ausdrucks als Herstellen von Bezügen. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 33, 113-141.
- Wittmann, E. C. (1985). Objekte - Operationen - Wirkungen: Das operative Prinzip in der Mathematikdidaktik. *Mathematik Lehren*, 11, 7–11.
- Zwetschler, L. (2015). *Gleichwertigkeit von Termen*. Wiesbaden: Springer.