Corinna MOSANDL, Dortmund

Stellenwerte verstehen- Empirische Einblicke in die Förderung des dekadischen Verständnisses bei Grundschulkindern

Ein Verständnis der Stellenwerte gilt als Grundlage für vielfältige mathematische Aktivitäten und Kenntnisse. Es dient nicht nur dem allgemeinen Zahlverständnis (vgl. Krauthausen & Scherer 2011), sondern auch dem Operationsverständnis (vgl. Carpenter et al. 1997) und kann damit aus Voraussetzung für ein flexibles und verständiges Rechnen gesehen werden (vgl. van de Walle 1994, Moser Opitz 2007). Daneben spielt eine sichere Kenntnis über die Eigenschaften unseres gebräuchlichen Zehner-Stellenwertsystems eine wichtige Rolle beim Umgang mit dekadischen Maßeinheiten (vgl. Häsel-Weide & Nührenbörger 2012) sowie beim Schätzen und Überschlagen von Mengen (vgl. Scherer 2009). Eine besondere Bedeutung bekommt ein sicheres Basiswissen im Bereich der Stellenwerte der natürlichen Zahlen, wenn im Unterricht der Sekundarstufe 1 die Erweiterung des Zahlbereichs zu den Dezimalzahlen thematisiert wird (vgl. Heckmann 2007).

1. Lerngegenstand Stellenwertverständnis

Um ein tragfähiges, also erweiterbares Stellenwertverständnis über die verschiedenen Zahlbereiche hinweg aufzubauen, müssen verschiedene Eigenschaften in den Blick genommen werden (vgl. Ross 1989). Eine Ziffer in einer Zahl trägt stets zwei Informationen: ihren Stellenwert- um welche Mächtigkeit handelt es sich?- sowie ihren Zahlenwert: wie viele Einheiten dieser Mächtigkeit sind an dieser Stelle zu finden? So bedeutet beispielsweise die Ziffer 2 in der Zahl 237, dass es sich gemäß der Konventionen unseres Stellenwertsystems an dieser Stelle um Hunderter handeln muss (Stellenwert) und zwar genau um *2* Hunderter (Zahlenwert). Die gültigen Notationskonventionen legen ebenfalls fest: sind an einer Stelle mehr als neun Einheiten zu finden, z.B. 12 Hunderter, so wird in die jeweils nächst größere Stelle gebündelt: in diesem Fall wird in einen Tausender gebündelt und zwei Hunderter bleiben an der Stelle übrig. Über diese systemischen Eigenschaften hinaus muss ebenfalls klar sein, dass das Anwachsen der Stellenwerte im dekadischen System jeweils um dem Faktor 10 geschieht und dass die Mächtigkeiten der einzelnen Stellen additiv miteinander verbunden werden können, um die Gesamtanzahl einer Menge zu ermitteln. Die aufgelisteten Eigenschaften gehören zum traditionellen Lernstoff für den Mathematikunterricht, die insbesondere im Rahmen der Zahlraumerweiterung thematisiert werden. Sie sollten bis zum Ende der Grundschul-

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

zeit, wenn der Zahlenraum bis zu einer Million erarbeitet wurde, von allen Schülerinnen und Schülern durchdrungen worden sein. Tatsächlich aber zeigen verschiedene Studien, dass dies für einen nicht geringen Teil von Lernenden der Sekundarstufe nicht zutrifft (vgl. z.B. Humbach 2008, Moser Opitz 2007). Moser Opitz (2007) weist in diesem Zusammenhang darauf hin, dass durch die Ergebnisse ihrer Studie der Schluss getroffen werden kann, dass sowohl das Bündeln und Entbündeln, als auch allgemeiner Zahlaufbau und Größenbeziehungen nicht verstanden worden sind. Laut weiterer Untersuchungen (vgl. Ross 1989, Hanich et al. 2001) zu Schwierigkeiten im Stellenwertverständnis, zeigen und präzisieren sich Unsicherheiten von Schülerinnen und Schüler insbesondere dann, wenn Aufgaben zu Zahlzerlegungen gestellt werden, die abweichend von genannten Standardzerlegung sind. So konnten die befragten Schülerinnen und Schüler zwar oft angeben, dass 2 Hunderter, 3 Zehner und 7 Einer die Zahl 237 ergeben, bei der Darbietung der Zahl als beispielsweise 1 Hunderter, 13 Zehnern und 7 Einern zeigen sich jedoch zahlreiche und unterschiedliche Fehllösungen, die hier beispielsweise auf ein fehlendes Verständnis des Zahlenwerts hindeuten mögen.

Aus dieser sich zeigenden Schwierigkeit können jedoch mithilfe der Veranschaulichung durch die Stellenwerttafel als zusätzlichen Deutungskontext produktive Lerngelegenheiten geschaffen werden, wie es beispielsweise auch in dem Entwicklungsprojekt „Mathe sicher können“ (vgl. Selter et al. 2014) realisiert worden ist.

2. Forschungsanliegen und Untersuchungsdesign

Die aus dem Projekt „Mathe sicher können“ erworbenen Erkenntnisse über bereits erworbene Fähigkeiten von Lernenden am Ende der Grundschulzeit bzw. zu Beginn der Sekundarstufe 1 sowie zu Aufgabendesign und Fördermöglichkeiten im Bereich des dezimalen Stellenwertverständnisses sollten im vorgestellten Dissertationsprojekt noch weiter ausgeschärft werden. Darüber hinaus sollten weiterführenden Erkenntnisse darüber erlangt werden, wie hilfreich für die Förderung bzw. den Aufbau eines tragfähigen Verständnisses insbesondere der fachliche Austausch zwischen den Lernenden einer Kleingruppe sein kann. Dazu wurden in den Fördersituationen gezielt produktive Irritationen (vgl. Schwarzkopf & Nührenbörger 2010) genutzt, um die Schülerinnen und Schüler mit ihren individuellen, teilweise nicht tragfähigen Ansichten und Zugangsweisen zu konfrontieren, die im gemeinsamen von einer Moderatorin angeleiteten Gespräch reflektiert und geklärt werden sollen. Auf der inhaltlichen Ebene wurden für die Gestaltung der insgesamt vierstündigen Förderung mathematisch reichhaltige Aufgabenformate gewählt, die den Fokus auf die fachlichen Hintergründe, insbesondere auf die oben dargestellten Eigenschaften des dezimalen Stellenwertsystems, legen. Zur Auswertung der gesammelten Daten wird die Methode der epistemologischen Analyse (vgl. Steinbring 2000) genutzt, um sowohl die individuellen Deutungen der Lernenden, als auch die mathematische Verständigung untereinander zu erfassen.

3. Erste Ergebnisse und Ausblick

Die bisherigen Auswertungen zeigen, dass Lernende, die innerhalb von Fördersituationen mit Aufgabe zu nicht standardisierten Zahlzerlegungen konfrontiert werden, unterschiedliche Vorgehensweisen beim Lösen wählen. In einer Arbeitsphase, bei der die Schülerinnen und Schüler zunächst jeweils eigene Lösungen produzieren sollten, können anhand der Schülerdokumente unterschiedliche individuelle Sichtweisen und Erklärungsansätze für die gefundenen Lösungen sichtbar gemacht werden. Aufgegriffen und konkretisiert werden diese in einer anschließenden gemeinsamen Diskussionsrunde, bei der auch Rückfragen zur Vorgehensweise möglich und gewünscht sind. In diesen Phasen können aber auch noch unzureichende Erklärungsansätze und somit Lücken im Verständnis sichtbar gemacht werden, wenn beispielsweise die Rolle der Null an einer nicht besetzen Stelle innerhalb einer Zahl nicht erklärt werden kann.

Die Lösungsansätze der Lernenden innerhalb der Fördersituationen legen nahe, dass diese sich anscheinend in einem Spannungsfeld zwischen empirischer Situiertheit und relationaler Allgemeinheit befinden (vgl. Steinbring 2000). Dies bedeutet, dass für einzelne Aufgaben durchaus mathematisch richtige Lösungen gefunden werden können, es den Schülerinnen und Schülern aber nicht immer gelingt, allgemeingültige Regeln dahinter zu erkennen und fachgerecht anzuwenden. So bleibt das gelernte Wissen über Stellenwerte fragil und es ist somit ungewiss, ob dies für ein erfolgreiches Weiterlernen in der Sekundarstufe ausreichend ist.

Damit bleibt die Frage bestehen, wie die mathematischen Strukturen innerhalb von Unterrichts- und Fördersequenzen vermehrt in den Blick genommen werden können. Die ersten Ergebnisse des Forschungsprojekts zeigen dabei einige förderliche Faktoren auf, so scheinen sich beispielsweise dann Erkenntnisse über Zusammenhänge entwickeln zu können, wenn gleiche Aufgaben mit unterschiedlichen Anschauungsmitteln (z.B. Systemwürfelmaterial und Stellenwerttafel) gelöst werden sollen und damit auch an bereits erworbene Erkenntnisse angeknüpft werden kann. Darüber hinaus kommt aber auch dem gemeinsamen Austausch von Vorgehensweisen und Lösungsansätzen eine besondere Bedeutung zu, da es durch das Nachvollziehen anderer Sichtweisen zu einer Weiterentwicklung des eigenen Verständnisses kommen kann.

Literatur

Carpenter, T.P. et al (1997). A longitudinal study of intervention and understandig in children's multidigit addition and subtraction. *Journal for Research in Mathematics education* 29, 3-20.

Hanich, L.B., Jordan, N.C., Kaplan, D., Dick, J. (2001). Performance across different areas of mathematical cognition in chldren with learning disabilities. *Journal of Educational Psychology 93,* 615-626.

Häsel-Weide, U. & Nührenbörger, M. (2012). Fördern im Mathematikunterricht. In H. Bartnitzky, U. Hecker & M. Lassek (Hrsg.), *Individuell fördern – Kompetenzen stärken.* (Vol. 134, Heft 4). Frankfurt am Main: Grundschulverband.

Heckmann, K. (2007). Zum Dezimalbruchverständnis von Schülerinnen und Schülern—Theoretische Analyse und empirische Befunde. *Journal für Mathematik-Didaktik*, *28*(1), 74-75.

Hiebert, J.; Wearne D. (1996). Instruction, understanding, and skill in multidigit addition and subtraction. *Cognition and Instruction 14*, 251-283.

Humbach, M. (2008). *Arithmetische Basiskompetenzen in der Klasse 10. Quantitative und qualitative Analysen.* Berlin: Dr. Köster.

Krauthausen, G.; Scherer, P. (2011). *Einführung in die Mathematikdidaktik.* Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag.

Moser-Opitz, E. (2007). *Rechenschwäche/ Dyskalkulie.* Theoretische Klärung und empirische Studien an betroffenen Schülerinnen und Schülern. Bern/ Stuttgart/ Wien: Haupt.

Scherer, P. (2009). Diagnose ausgewählter Aspekte des Dezimalsystems bei lernschwachen Schülerinnen und Schülern. In: *Beiträge zum Mathematikunterricht 2009.* Münster: WTM, S. 835-838.

Nührenbörger, M. & Schwarzkopf, R. (2010). Diskurse über mathematische Zusammenhänge. In C. Böttinger et al. (Hrsg.): *Mathematik im Denken der Kinder. Anregungen zur mathematikdidaktischen Reflexion.* Seelze: Kallmeyer, 169-215.

Selter, C., Prediger, S., Nührenbörger, M. & Hußmann, St. (Hrsg.) (2014). *Mathe sicher können.* (Natürliche Zahlen). Berlin: Cornelsen.

Steinbring, H. (2000). Mathematische Bedeutung als eine soziale Konstruktion—Grundzüge der epistemologisch orientierten mathematischen Interaktionsforschung. *Journal für Mathematik-Didaktik*, *21*(1), 28-49.

Ross, S. H. (1989): Parts, wholes and place value: A development view. In: *Arithmetic teacher 2*, 47-51.

Van de Walle, J. A. (1994). *Elementary school mathematics. Teaching developmentally.* (2. ed.) White Plains, N.Y: Longman.