Eva MÜLLER-HILL, Köln

Mathematisches Erklären und substantielle Argumentation im Sinne von Toulmin

1. Problemstellung

Betrachtet man Erklären (nachfolgend stets i.S.v. Erklären-warum) zunächst nicht als besonderen Typus von Sprachhandeln, sondern argumentationstheoretisch als einen besonderen Typus von Begründungen für einen Sachverhalt, so geht es beim Erklären darum, das Explanandum mit Bezug auf geeignete situationale Randbedingungen aus einem im Rahmen einer geeigneten Theorie gültigen allgemeinen Gesetz zu deduzieren. Eine Erklärung entspräche in diesem Sinne dem analytisch-deduktiven Argumentationsideal. Problematisch daran insbesondere auf das mathematische Erklären und auf den Mathematikunterricht ist das folgende Dilemma: Erklären als deduktiv gültige Argumentation mit gesetzesartigen Prämissen scheint einerseits *zu wenig restriktiv*, da so etwa in Bezug auf mathematische Beweise nicht angemessen zwischen einem formal korrekten und einem erklärenden Beweis unterschieden werden kann: Jeder formal korrekte Beweis wäre dann bereits eine Erklärung. Andererseits erscheint diese Konzeption des Erklärens *zu stark restriktiv* insbesondere in Bezug auf alltäglichen Erklärpraxen im Mathematikunterricht, da sie rein normativ ist und wenig Anschlussmöglichkeiten z.B. für sprachhandlungsbezogene Aspekte liefert. Dies erfordert eine Differenzierung und Spezifikation von Charakteristika des Erklärens über das analytisch-deduktive Argumentationsideal hinaus. Erklären kann dazu durch eine spezifische Sachverhalts- und Adressatenbezogenheit als besondere Form des Begründens charakterisiert werden (vgl. Müller-Hill 2012).

Sachverhaltsbezogenheit von Erklären

Allgemeinheit, Gültigkeit für sinnvollen Phänomen*bereich* oder/und Situations- bzw. Objekt*typus*

Angabe von *entscheidenden* Gründen, Bezug zu wesentlichen, ggf. kausal wirksamen Eigenschaften beteiligter Objekte

Stärke von Erklärungen bemisst sich u.a. an *Vereinheitlichungspotential* in Bezug auf unterschiedliche Phänomene

Adressatenbezogenheit von Erklären

Erklären dient *Verständnisförderung* bei Adressaten

Bezug zu subjektiven *Hintergrundtheorien* der Adressaten

Rückführung auf Bekanntes bei gleichzeitiger *Informativität* für Adressaten

Der hier vorgestellte Ansatz besteht darin, mathematische Erklärungen unter Rückgriff auf diese charakteristischen Aspekte als spezifische substantielle

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

Argumentationen im Sinne von Toulmin (1958) zu analysieren. Wesentlich für Toulmins Auffassung ist die Zuweisung unterschiedlicher funktionaler Rollen innerhalb einer Argumentation entlang herausfordernder Fragen. Die im Folgenden für das Erklären vorgeschlagenen spezifischen Fragen dienen als eine erste pragmatische Konkretisierung der genannten Charakteristika.

2. Toulmins funktionale Kernelemente substantieller Argumente

Stephen Toulmin grenzt sich mit seiner argumentationstheoretischen Position vom klassischen, analytisch-deduktiven Argumentationsideal ab, welches die deduktive Gültigkeit einer Argumentation in den Vordergrund stellt und wonach gültige Argumentationen analytisch sind, also die in Frage stehende Schlussfolgerung stets schon logisch „in den Prämissen enthalten" ist. Dem gegenüber stellt er substantielle Argumente, bei denen die Informationen, die die Schlussfolgerung enthält, nicht bereits vollständig (im Sinne logischer Folgerung) in den Prämissen enthalten sein müssen. Toulmin differenziert unterschiedliche funktionale Kernelemente eines substantiellen Argumentes in logischer und epistemologischer Hinsicht u.a. als Antworten auf verschiedene herausfordernde Fragen eines (hypothetischen) *challenger*:

C(laim): behaupteter Sachverhalt.	
D(ata): Tatsachenaussagen, Basis für C	„Wovon kannst Du ausgehen?"
W(arrant): allgemeine, ggf. hypothetische Aussage, um Schritt von D nach C zu autorisieren.	„Wie bist du dahin (zu genau diesen Daten) gekommen?"
Modaler Q(ualifier): qualifiziert Stärke des *warrant*.	„In welchem Maße garantiert W (auf Basis von D) den *claim*?" (wahrscheinlich, notwendig, …)
R(ebuttal): Zeigt Ausnahmen für die Gültigkeit des *warrant* an.	„Unter welchen Umständen ist der Schritt von D nach C nicht autorisiert?"
B(acking): Stützung der Gültigkeit des w*arrant* innerhalb des Geltungsbereichs.	„Warum glaubst du ist der Schritt von D nach C im Allgemeinen (ggf. genauer qualifiziert durch Q) autorisiert?"

3. Erklären im Toulmin-Modell – ein Vorschlag

Fach- oder zweckspezifische Spezifikationen dieser funktionalen Rollen sind von Toulmin durchaus intendiert (vgl. 1958, S. 96). Erklären scheint dabei nicht allein über den *warrant* spezifizierbar, sondern erst im expliziten Zusammenspiel von *warrant*, *backing* und *rebuttal*. Im Rahmen dieses Beitrages schlage ich nur zu einigen der oben genannten Charakteristika geeignete (noch nicht mathematikspezifische) Spezifikationen der Rollen „*backing*" und „*rebuttal*" vor, ohne sie hier detailliert motivieren zu können:

Aspekt	Angeben entscheidender Gründe, Bezug zu Hintergrundwissen
Fragen	Warum ist der Schritt von D nach C *entscheidend*, warum funktioniert er *so und nicht anders*? Was passiert mit C, wenn D *verändert* wird?
Rolle	*backing* aus bekanntem Faktenwissen
Aspekt	**Erklären als bereichsinvariante allgemeine Begründung**
Fragen	Wo endet ggf. der Gültigkeitsbereich des *warrant*? Kann man *Ausnahmen systematisieren* (und damit kontrollieren)?
Rolle	*rebuttal* – spezifiziert bereichseingrenzende Ausnahmen

„Entscheidend" wird hier angelehnt an die Bedeutung von „ursächlich" aufgefasst – der „und nicht anders"-Teil des *backings* bzw. die Auswirkungen von Veränderungen von D auf C testen gerade auf kausalartige Zusammenhänge. Erklären wird dadurch nicht nur als wissensorganisierend, sondern im Sinne einer substantiellen Argumentation auch als wissensgenerierend für die Adressaten verstanden – selbst bei bekanntem und etabliertem *warrant* (der aber auch unbekannt und hypothetisch sein darf) mit maximalem Gültigkeitsbereich (was bei erklärenden Beweisen als Grenzfall auftritt, aber nicht unbedingt bei jeder mathematischen Erklärung im Unterrichtsdiskurs). *Anmerkung*: Die Explikation von *backing* und *rebuttal* (und ggf. der zugehörigen *qualifier*) ist nicht unbedingt Teil der üblichen diskursiven Praxis, sowohl in Alltagsargumentationen als auch im Mathematikunterricht (vgl. (Toulmin 1958, S. 98), zu letzterem z.B. (Dooley 2013)). Dies könnte eine Erklärung dafür sein, warum in empirischen Daten zum Argumentieren Sequenzen zu „Erklären-warum" häufig schwer identifizierbar sind.

4. Beispielanalyse einer moderierten dialogischen Erklärung

Die nachfolgende Unterrichtssequenz ist (Morselli 2013) entnommen (Beteiligte: Elio, Beobachterin, Lehrerin). Der Siebtklässler Elio antwortet auf die Frage der Lehrerin: „Was könnt ihr über die Summe dreier aufeinanderfolgender Zahlen sagen?" Die Sequenz hat im Rahmen dieses Beitrages rein illustrierende Funktion, da sich hier erklärensspezifische funktionale Rollen innerhalb der Argumentation vergleichsweise deutlich ausweisen lassen. Bemerkenswert ist, dass die Lehrerin mit Bezug auf das *backing* in (5) den *qualifier* „always" verwendet, Elio aber in (6) ein *rebuttal* einbringt, welches die Bereichsinvarianz der Erklärung für ganz $\mathbb{N}$ in Frage stellt. Der für Elio wohl auf Zahlen mit überschaubarer Ziffernddarstellung eingeschränkte Gültigkeitsbereich des *warrant* scheint für ihn aber kein sinnvoller Gültigkeitsbereich im Sinne der Ausgangsfrage zu sein. Elio liefert im Anschluss einen algebraischen Beweis, der aber nicht das hier generisch bereits enthaltene allgemeine Argument aufgreift. (Eine detailliertere Darstellung und Begründung des folgenden Analysevorschlages unterbleibt aus Platzgründen.)

(1 – claim) *Elio*: the sum [of three consecutive numbers] is a multiple of three.

(2 – data) *Elio*:

$1+2+3=6$
$+1$
$7+8+9=24$
$51+52+53=156$

(3 – warrant) *Elio*: if the third number gives a unit to the first number, we have three equal numbers.

(4 – backing: „nicht anders“) *Observer*: and in this way you understand why this is a property that not always holds. […] This explains why we need three consecutive numbers to have it. *Elio*: if we tried, here, instead of 53, with 54, I would get 53. I take away 1 from 54 and I get 53, not 52.

(5 – backing: „in der Regel so“) *Teacher*: and you don't have anymore three equal numbers. […] using three consecutive numbers […] I always get three times the intermediate number, exactly because there is that „moving“ [of 1 from biggest to smallest number].

(6 – rebuttal) *Elio*: but maybe they did not work on great numbers and I could not do an example on all numbers. (Ergänzungen und Auslassungen in „[]“: EMH)

5. Ausblick und offene Fragen

Der hier umrissene Ansatz kann als Ausgangspunkt zur weiteren Analyse fachspezifischer Erklärungstypen oder -strategien dienen, z.B. von mathematischen Analogieerklärungen. Er bietet Anknüpfungspunkte für Überlegungen zur Förderung (mathematischen) Erklärens im Unterricht, etwa im Sinne des expliziten Einforderns erklärensspezifischer *backings* und *rebuttals* durch geeignete, herausfordernde Fragen oder explizite Reflektionen zum Gebrauch geeigneter *qualifier*, weist aber auch besondere, vor allem sprachliche Herausforderungen aus: Das Identifizieren funktionaler Rollen in einer Argumentation etwa setzt ein reflektiertes, präzises Sprachverständnis, klare Diskursregeln und ggf. ein geeignetes Metavokabular bei den Beteiligten voraus, da einfache sprachliche Indikatoren in konkreten Äußerungssequenzen allein („weil“, „sofern“ o.ä., grammatischer Satztyp) keine absolute oder zuverlässige Kategorisierung deren argumentativer Funktion im Diskurs erlauben (Toulmin 1958, S. 92; Nielsen 2011).

Literatur

Dooley, T. (2013), Young pupils' generalisation strategies for the handshake problem, CERME 8 Conference Proceedings.

Morselli, F. (2013), Approaching algebraic proof algebraic proof at lower secondary school level, CERME 8 Conference Proceedings.

Müller-Hill, E. (2012), Ein handlungsbasiertes Konzept mathematischer Erklärung, Beiträge zum Mathematikunterricht, 617-620.

Nielsen, J.A. (2011), Dialectical Features of Students' Argumentation: A Critical Review of Argumentation Studies in Science Education, Res Sci Educ, 43 (1), 371-393.

Toulmin, S. (2003 (1958)), The Uses of Argument, Updated Version, Cambridge University Press.