Dmitri NEDRENCO, Würzburg

Axiomatisieren lernen mit Papierfalten

In den Standards für die Lehrerbildung im Fach Mathematik (DMV, 2008) wird eine der Kompetenzen im Bereich Geometrie als »Die Studierenden beschreiben Axiomatik und Konstruktion als Wege für eine formale Grundlegung der euklidischen Geometrie« benannt. Es stellt sich die Frage, wie Studierende diese Kompetenz erwerben sollen. Ein modernes Axiomensystem der euklidischen Geometrie besteht zumeist aus einer Vielzahl von nichttrivialen Axiomen und es hat lange gedauert, bis diese Axiome gefunden wurden. Wir können also nicht erwarten, dass Studierende diesen Weg in kurzer Zeit gehen können. Welche Auswege gibt es aus dieser Situation? Man kann mit wenigen einleuchtenden Axiomen beginnen, komplizierte Axiome, wie etwa Axiome der Stetigkeit und Anordnung, außer Acht lassen und daraus eine Geometrie entwickeln (Schnabel, 1981). Eine andere Möglichkeit ist es, Studierende ein Axiomensystem selbst entwickeln zu lassen. Diesen Prozess des Auffindens von Axiomen einer bestehenden Theorie (anders gesagt, Reduktion auf ein Axiomensystem), nennt man auch *Axiomatisieren* dieser Theorie. Das heißt, man kann Studierenden eine geometrische Theorie vorlegen, die ein einfaches Axiomensystem erlaubt, mit der Hoffnung, dass sie daran die wesentlichen Merkmale eines Axiomensystems lernen und damit Sinn und Zweck eines Axiomensystems besser verstehen.

Eine solche Theorie könnte die des Papierfaltens sein, denn Papierfalten kann auf ein einfaches Axiomensystem reduziert werden (Alperin & Lang 2006, Martin 1998). Außerdem ist es wohlbekannt, dass Origami (jap. *oru* für falten, *kami* für Papier) ein hohes Faszinationspotenzial besitzt; deswegen sind wir der Meinung, dass es leicht gelingen könnte, eine Axiomatisierung des Papierfaltens gegenüber den Studierenden zu motivieren.

Daher wird im Sommersemester 2015 an der Universität Würzburg ein einsemestriger Kurs »Axiomatisieren lernen mit Papierfalten« für gymnasiale Lehramtskandidaten angeboten, in dem durch gezielte Aufgabenstellungen und Konstruktionen Studierende die Axiome des Papierfaltens nach und nach entdecken sollen; ferner sollen sie diese Axiome auf Unabhängigkeit und Vollständigkeit prüfen und in diesem Zusammenhang über Axiomensysteme der Geometrie und Axiomatik im Allgemeinen diskutieren.

Was ist Papierfalten?

Üblicherweise stellt man sich unter Origami Kraniche, Weihnachtstssterne, springende Frösche oder ähnliches vor. Diese Objekte sind meist kunstvoll

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

aus einem oder mehreren Papierstücken gefaltet und sind nur schwer mathematisch erfassbar.

Die wohl einfachste Form des Origami ist das 1-fach-Origami – dazu sagen wir hier »Papierfalten«: Nur solche Faltungen eines Papierstücks (besser der euklidischen Ebene) sind zulässig, bei denen pro Faltung genau ein Falz entsteht. Es hat sich in den letzten 25 Jahren herausgestellt, dass jede dieser 1-fach-Faltungen durch sieben Grundfaltungen beschrieben werden kann, genannt Huzita-Justin-Axiome (Alperin & Lang, 2006). Eine Diskussion dieser Axiome findet man zum Beispiel bei Waschbusch und Gawlick (2009) oder Alperin und Lang (2006). Für den Geometrieunterricht ist Papierfalten unter anderem reizvoll, weil es reichhaltiger als euklidische Konstruktionen ist: Alle Punkte der Ebene, die mit Zirkel und Lineal konstruierbar sind, sind auch mit Papierfalten konstruierbar; Papierfalten erlaubt aber darüber hinaus Konstruktionen weiterer Punkte – man kann etwa quartische Gleichungen mit rationalen Koeffizienten lösen, insbesondere Winkel dreiteilen und das Delische Problem lösen.

Forschungsfragen

Viele Experten der Origamiwelt zweifeln nicht daran, dass Papierfalten eine sehr nützliche Beschäftigung im Mathematikunterricht ist, allerdings gibt es nur wenige Belege dafür, dass Papierfalten tatsächlich Schülerkompetenzen (und wenn ja, welche) verbessert. Eine solche Kompetenz wäre werkzeugadäquat das räumliche Vorstellungsvermögen. Jedoch erheben wir dessen Verbesserung nicht zu einem Ziel des Kurses, weil wir nicht erwarten, innnerhalb eines Semesters darin wesentliche Veränderungen zu erzielen. Vielmehr glauben wir, dass nur eine gezielte, konsequente und mehrjährige Beschäftigung mit Papier in der Schule eine solche Verbesserung erbringen kann. Einen Überblick über Origami und das Vorstellungsvermögen gibt Boakes (2011).

Miri Golan (2010) weist darauf hin, dass Lehrkräfte, die Origami im Unterricht einsetzen wollen, selbst gute Faltfertigkeiten haben sollen. Doch kann man von einer Lehrkraft keine autodidaktische Aneignung der Faltkunst verlangen; vielmehr sollte es eine dazu passende Aus- bzw. Fortbildung geben. Deswegen stellt sich die Frage: Kann man, und wenn ja, wie, einen kompakten und unterhaltsamen Hochschulkurs entwickeln, in dem zukünftige Lehrerinnen und Lehrer notwendige mathematische Hintergründe des Papierfaltens erwerben sowie grundlegende Faltungen erlernen? Dies ist eine der Forschungsfragen, denen wir nachgehen wollen.

Der zweite wesentliche Teil der Unternehmung ist, folgende Fragen zu behandeln: Eignet sich Papierfalten zum Axiomatisierenlernen? Welche

Schwierigkeiten haben Studierende beim Axiomatisieren einer mathematischen Theorie? Welches Verständnis des Prozesses des Axiomatisierens erwerben die Studierenden?

Es ist nicht so einfach, diese Fragen zu operationalisieren. Wir befinden uns gerade in der Entwicklung derartiger Forschungsfragen.

Inhaltliche Ziele

Im Kurs sollen Studierende hauptsächlich Sinn und Zweck von Axiomensystemen kennenlernen und Fertigkeiten im fortgeschrittenen Umgang mit Papierfalten erwerben. Wir präzisieren diese Ziele wie folgt:

1) Studierende kennen wichtige Eigenschaften eines Axiomensystems, kennen didaktische Schwierigkeiten der Axiomatik in der Schule; sie können wesentliche Unterschiede zwischen Axiomensystemen der euklidischen Geometrie nach Euklid bzw. Hilbert bzw. George E. Martin (Martin, 1975) herausstellen. Ferner kennen Studierende ein Axiomensystem des Papierfaltens und wesentliche Unterschiede zwischen Zirkel&Lineal-Konstruktionen und dem Papierfalten.
2) Studierende können charakteristische Konstruktionen des Papierfaltens wie Winkeldreiteilung, Lösen von kubischen Gleichungen, Konstruktionen von Vielecken sowie Konstuktionen von wichtigen Verhältnissen (1/3, 1/5, etc) durchführen und erklären.

Das erste Ziel strebt Diskussion und Verständnis logischer Eigenschaften von Axiomensystemen an, das zweite möchte Papierfalten von einem gehobenen Standpunkt lehren.

Methoden

Die Methodik des Kurses orientiert sich am lokalen Ordnen im Sinne Freudenthals; die Studierenden fangen mit verschiedenen Faltkonstruktionen an und destillieren daraus Grundfaltugen. Da Papierfalten eine vermutlich unbekannte Beschäftigung für die Studierenden ist, scheint eine Mischung aus Vorlesungen und gemeinsamen Konstruktionssequenzen angebracht.

Vor dem Kurs wird ein schriftlicher Pre-Test in Form eines Fragebogens durchgeführt, um das Vorwissen der Teilnehmer im Hinblick auf Origami sowie ihre Bekanntschaft mit Axiomatik zu erfassen.

Aus organisatorischen Gründen gehen wir von 10 bis 15 Teilnehmerinnen und Teilnehmer aus, die wir nach dem Kurs einzeln interviewen können. Die videoaufgezeichneten Interviews wollen wir leitfadengesteuert, aber möglichst offen, gestalten, um anschließend im Rahmen der Grounded-Theory das erhobene Material auszuwerten.

Weitere Bemerkungen

Zwar sind Axiome des Papierfaltens aus mathematisch-logischer Perspektive naheliegend und interessant, doch sind wir der Meinung, dass Axiomatisieren des Papierfaltens kein im Schulunterricht angestrebtes Ziel sein sollte; wir fassen es so auf, dass es dem Hochschulunterricht vorbehalten ist. Es gibt jedoch sehr viele interessante Faltkonstruktionen, die im Schulunterricht spannend besprochen werden können (Henn 2009, Hull 2013, Schmitt-Hartmann 2013). Allerdings gibt es aus unserer Sicht keinen gezielten – linearen – Plan für alle Klassen und Schulformen und es wäre eine weitere wichtige Forschungsaufgabe, einen solchen Plan zu konzepieren.

Literatur

Alperin, R. C., & Lang, R. J. (2006). One-, two, and multi-fold origami axioms. *Origami*, *4*, 371-393.

Beck, C., & Maier, H. (1993). Das Interview in der mathematikdidaktischen Forschung. Journal für Mathematik-Didaktik, 14(2), 147-179.

Boakes, N. (2011, June). Origami and Spatial Thinking of College-Age Students. In *Origami 5: Fifth International Meeting of Origami Science, Mathematics, and Education* (p. 173). CRC Press.

DMV, GDM, MNU (2008). Standards für die Lehrerbildung im Fach Mathematik. Empfehlungen von DMV, GDM und MNU, Juni 2008. *Mitteilungen der DMV*, *16*, 149-159.

Freudenthal, H. (1963). Was ist Axiomatik, und welchen Bildungswert kann sie haben. Der Mathematikunterricht, 9(4), 5-29.

Golan, M., & Jackson, P. (2010). Origametria: A program to teach geometry and to develop learning skills using the art of origami. *Online: http://www.emotive.co.il /origami/db/pdf/996_golan_article.pdf, (aufgerufen am 2.3.2015)*.

Henn, H.-W., (2003). Origamics. Papierfalten mit mathematischem Spürsinn. *Online: http://www.mathematik.uni-dortmund.de/didaktik/_personelles/people/henn/origa_hd.pdf (aufgerufen am 2.3.2015).*

Hull, T. (2013). *Project Origami: Activities for Exploring Mathematics*. CRC Press.

Martin, G. E. (1975). *The foundations of geometry and the non-Euclidean plane*. Springer Science & Business Media.

Martin, G. E. (1998). *Geometric constructions*. Springer.

Schmitt-Hartmann, R. & Herget, W. (2013). *Moderner Mathematikunterricht. Papierfalten im Mathematikunterricht 5 bis 12.* Klett.

Schnabel, R. (1981). *Euklidische Geometrie* (Habilitationsschrift).

Van der Waerden, B. L. (1967). Klassische und moderne Axiomatik. *Elemente der Mathematik*, *22*, 1-4.

Waschbusch, J., & Gawlick, T. (2009). Grundfaltungen des Origamis. *Mathematikunterricht*, *55*(6), 49.