

Renate NITSCH, Darmstadt

## **Typische Fehlermuster im Bereich funktionaler Zusammenhänge**

Im Projekt CODI (COncceptual DIfficulties in the field of functional relationships) wurden typische Lernschwierigkeiten von Schülerinnen und Schülern im Bereich funktionaler Zusammenhänge erforscht. Hierzu wurde ein Diagnoseinstrument entwickelt, das typische Fehlermuster bei Darstellungswechseln zu linearen und quadratischen Funktionen erfasst. Dabei wurden, basierend auf den Ergebnissen des Projekts HEUREKO (vgl. Nitsch et al., 2014) der graphisch-algebraische (GA), der situativ-algebraische (SA) und der graphisch-situative (GS) Darstellungswechsel einbezogen.

Fokussiert wurden Lernschwierigkeiten im Bereich des konzeptuellen Wissens, wobei Fehler als sichtbare Produkte von Lernschwierigkeiten aufgefasst wurden. Dabei wurden vorrangig systematische Fehler betrachtet, da bei diesen davon auszugehen ist, dass sie reproduzierbar sind und ihre Fehlerursache meist in stabilen falschen Konzepten bzw. sogenannten *Fehlvorstellungen* liegt (Führer, 1997). Für das Ziel der Diagnose von Lernschwierigkeiten wurden verschiedene charakterisierende Eigenschaften von Fehlvorstellungen aus bestehenden Konzeptualisierungen dieses Begriffs herausgearbeitet: Fehlvorstellungen treten *wiederholt* auf, sind *robust* gegenüber äußeren Einflüssen und über einen längeren Zeitraum *stabil* (z.B. Hammer, 1996; Leinhardt et al., 1990).

### **Design der empirischen Studie**

Um das Diagnoseinstrument flexibel in der Unterrichtspraxis nutzen zu können und die Lehrkräfte bei der Diagnose von Lernschwierigkeiten zu unterstützen, wurde das Instrument als online-Tool entwickelt mit dem Ziel einer automatischen Auswertung. Dementsprechend kamen vor allem Multiple-Choice-Aufgaben zum Einsatz. Diese haben das Format „1 von 4“, wobei einzelne Distraktoren für typische, systematische Fehler stehen. Es wurden mehrere strukturell gleiche Aufgaben entwickelt, um Fehlermuster aufdecken zu können. Nur dann, wenn sich ein systematischer Fehler über mehrere Aufgaben hinweg in einem konsistenten Fehlermuster zeigt, wird eine dahinterliegende Fehlvorstellung vermutet. Die Diagnoseaufgaben wurden in einer Pilotierung erprobt und mithilfe diagnostischer Interviews validiert. Im Haupttest kamen 28 Aufgaben zum Einsatz. Die Stichprobe bestand aus 25 Klassen aus drei südhessischen Gymnasien, zwei integrierten Gesamtschulen und einer reinen Oberstufenschule mit insgesamt N=569 Schülerinnen und Schülern.

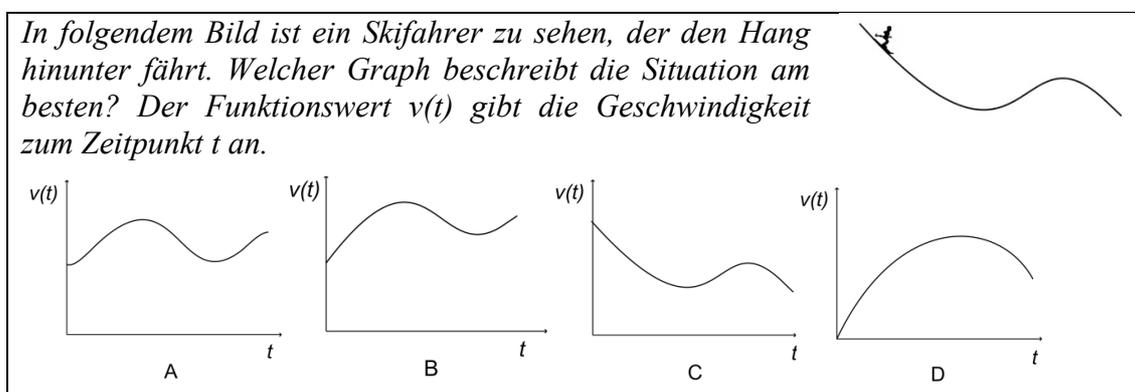
## Ergebnisse

Insgesamt konnten neun Fehlermuster identifiziert werden, die bei mehr als 10% der Schülerinnen und Schüler aufgetreten sind. Auffällig ist in diesem Zusammenhang, dass sich die Lernenden häufig von visuellen Aspekten fehlleiten lassen, wie es beispielsweise beim Graph-als-Bild-Fehler der Fall ist (siehe Abb. 1). Bei diesem Fehler interpretieren die Lernenden den Graphen als reales Situationsabbild und wählen deswegen denjenigen Graphen aus, der der Situation am meisten ähnelt.

Darstellungswechsel	Fehlermuster	Anzahl
GA - lineare Funktionen	Fokus auf Schnittpunkte mit den Achsen	25,7%
SA - lineare Funktionen	Verwechslung von Steigung und y-Achsenabschnitt	12,7%
GA - quadratische Funktionen	Vorzeichenfehler bei Verschiebung in x-Richtung	11,6%
GA - quadratische Funktionen	Stauch- bzw. Streckfaktor a nicht berücksichtigt	13,4%
SA - quadratische Funktionen	Falsches Einsetzen der Koordinaten des Scheitelpunkts	13,4%
SA - quadratische Funktionen	Vorzeichenfehler bei Verschiebung in x-Richtung	12,3%
GS	Graph-als-Bild-Fehler	16,0%
GS	Slope-height-Fehler	10,0%
GS	Epistemologische Hürde: Steigung an einem Punkt	36,0%

**Tab.1: Typische Fehlermuster, die bei über 10% der Schülerinnen und Schüler auftraten**

Mit Abstand am häufigsten trat das Fehlermuster „Fokus auf Schnittpunkte mit den Achsen“ auf, bei welchem die Schülerinnen und Schüler diejenige Gleichung auswählen, in welcher statt dem Parameter  $m$  der Steigung der  $x$ -Achsenabschnitt enthalten ist. In den diagnostischen Interviews zeigten sich vor allem zwei Begründungen. Zum einen argumentierten die Lernenden häufig, dass der  $y$ -Achsenabschnitt in der Gleichung enthalten ist und für die Lage der Geraden eine wichtige Rolle spielt und deswegen auch der  $x$ -Achsenabschnitt enthalten sein muss. Zum anderen verknüpften einige Lernende das „ $x$ “ in der Gleichung  $y=mx+b$  mit der  $x$ -Achse. Sie schlussfolgerten, dass vor dem „ $x$ “ in der Gleichung der  $x$ -Wert des Schnittpunkts der Geraden mit der  $x$ -Achse stehen muss.



**Abb.1: Graph-als-Bild-Fehler (Distraktor C)**

Insgesamt lassen sich zwei Ursachen für die identifizierten Fehlermuster ausmachen. Zum einen treten bei Darstellungswechseln mit situativer Beschreibung häufig Überlagerungen mit Alltagsvorstellungen auf. Die Lernenden greifen auf ihre intuitiven Vorstellungen aus ihrer Alltagswelt zurück und sofern diese den mathematischen Vorstellungen widersprechen, kann es zu Fehlvorstellungen kommen. Zum anderen lassen sich im innermathematischen Bereich, d.h. bei Darstellungswechseln ohne situative Beschreibung, häufig nicht ausreichend verallgemeinerte Prototypen beobachten. Das ist zum Beispiel dann der Fall, wenn die Lernenden bei der Gleichung einer quadratischen Funktion den Streck- bzw. Stauchfaktor  $a$  nicht berücksichtigen.

Neben der Analyse von typischen Fehlermustern wurde eine Varianzanalyse durchgeführt, um Gruppenunterschiede zu untersuchen. Es fällt auf, dass die 10. Klassen signifikant schlechter abschneiden als die 9. bzw. 11. Klassen. Allerdings liegt die Vermutung nahe, dass hierbei eine hintergründige Schultypabhängigkeit abgebildet wird, da die 10. Klassen alle aus einer integrierten Gesamtschule stammten, während die 9. bzw. 11. Klassen hauptsächlich aus Gymnasien bzw. einer reinen Oberstufenschule stammten. In Bezug auf das Auftreten von Fehlermustern konnten bei drei Fehlermustern signifikante Unterschiede festgestellt werden: „Fokus auf Schnittpunkte mit den Achsen“, „Verwechslung von Steigung und y-Achsenabschnitt“ und „Graph-als-Bild-Fehler“. Diese traten bei den 10. Klassen der integrierten Gesamtschule signifikant häufiger auf als bei den 9. bzw. 11. Klassen. Besonders stark ist dieser Effekt beim Fehlermuster „Fokus auf Schnittpunkte mit den Achsen“. Betrachtet man das Auftreten dieses Fehlers auf Klassenebene, so zeigt sich ein besonders häufiges Auftreten des Fehlermusters in den beiden B-Kursen der integrierten Gesamtschule. Insgesamt fällt auf, dass das Auftreten dieses Fehlermusters stark schwankt und in einer der neunten Klassen gar nicht auftritt. Es liegt nahe, dass das Auftreten des Fehlermusters von der unterrichtlichen Behandlung abhängt.

### **Ausblick**

Um herauszufinden, wie stabil die beobachteten Fehlermuster über einen längeren Zeitraum sind, wird derzeit ein Posttest durchgeführt. Erste Ergebnisse aus zwei Gymnasien mit insgesamt  $N=100$  Schülerinnen und Schülern aus der E-Phase zeigen, dass sich die Lernenden in den meisten Bereichen stark verbessert haben. Dabei gilt es zu beachten, dass in allen Klassen die Themen linearer und quadratischer Funktionen kurz vor dem Posttest-Zeitpunkt noch einmal wiederholt wurden. Im Bereich des graphisch-situativen Darstellungswechsels hingegen ist keine Verbesserung feststellbar. Bezüglich des Auftretens konkreter Fehlermuster lassen sich

vier Fehlermuster identifizieren, die bei einem Teil der Lernenden im Vor- und Nachtest auftraten: „Verwechslung von Steigung und y-Achsenabschnitt“ (8%), „Falsches Einsetzen der Koordinaten des Scheitelpunkts“ (14%), „Vorzeichenfehler bei Verschiebung in x-Richtung“ (7%) und „Graph-als-Bild-Fehler“ (56%). Es fällt auf, dass es sich um diejenigen Fehlermuster handelt, die bei einem Darstellungswechsel mit situativer Beschreibung auftreten und bei denen eine auf Intuition basierende Fehlvorstellung vermutet wird. Diese scheinen besonders stabil zu sein. Besonders auffällig ist der Graph-als-Bild-Fehler, der bei 56% der Schülerinnen und Schüler wieder auftritt. Gleichzeitig lässt sich erkennen, dass das Fehlermuster „Fokus auf Schnittpunkte mit den Achsen“, das insgesamt im Pretest am häufigsten aufgetreten ist, nicht mehr zu beobachten ist. Scheinbar handelt es sich hierbei um ein Fehlermuster, dem keine robuste Fehlvorstellung zugrunde liegt. Betrachtet man den Anteil der Lernenden, die ein Fehlermuster im Pretest zeigen und den Fehler *mindestens einmal* im Posttest machen, so zeigen sich deutlich größere Häufigkeiten zwischen 17 und 100%. Der Graph-als-Bild-Fehler tritt bei allen Lernenden noch mindestens einmal im Posttest auf. Es liegt die Vermutung nahe, dass die Lernenden zwar eine mathematisch korrekte Vorstellung entwickelt haben, ihre vorherige Vorstellung jedoch nicht aufgegeben haben, sondern beide Vorstellungen bestehen bleiben und situationsspezifisch aktiviert werden. Diese Vermutung wird durch die Tatsache gestützt, dass die Lernenden (mit Ausnahme eines Fehlermusters) in den anderen, zugehörigen Aufgaben des Posttests meist die richtige Antwort wählen. In einem nächsten Schritt sollen nun unter Berücksichtigung des Conceptual Change Ansatzes Interventionsmaßnahmen entwickelt und erprobt werden, die eine individuelle Förderung und Überwindung der diagnostizierten Fehlvorstellungen zum Ziel haben. Das entwickelte Diagnoseinstrument inkl. einer vorläufigen Feedbackversion lässt sich unter [www.codi-test.de](http://www.codi-test.de) abrufen.

## Literatur

- Führer, L. (1997): Pädagogik des Mathematikunterrichts. Eine Einführung in die Fachdidaktik für Sekundarstufen. Braunschweig, Wiesbaden: Vieweg.
- Hammer, D. (1996): Misconceptions or P-Prims: How May Alternative Perspectives of Cognitive Structure Influence Instructional Perceptions and Intentions? In: *The Journal of the Learning Sciences* 5 (2), 7–127.
- Leinhardt, G., Zaslavsky, O. & Stein, M.K.. Functions, Graphs, and Graphing (1990): Tasks, Learning, and Teaching. *Review of Educational Research*, 60(1), 1-64.
- Nitsch, R., Fredebohm, A., Bruder, R., Kelava, T., Naccarella, D., Leuders, T. & Wirtz, M. (2014): Students' Competencies in working with Functions in Secondary Mathematics Education – Empirical Examination of a Competence Structure Model. *International Journal of Science and Mathematics Education*.