Kathleen PHILIPP, Zürich

Kinder experimentieren mit Zahlen – Eine mathematische Tätigkeit unter der Lupe

Der Begriff des Experimentierens begegnet einem in ganz unterschiedlichen Kontexten. Häufig assoziiert man damit ein Hantieren mit Materialien oder Apparaturen. Was aber ist gemeint, wenn von Experimentieren in der Mathematik die Rede ist? Wie sieht diese mathematische Tätigkeit bei Lernenden aus? Und wie kann man im Mathematikunterricht experimentieren?

1. Was ist Experimentieren?

In den Naturwissenschaften ist das Experimentieren zentrales Erkenntnisinstrument (z.B. Shadish et al. 2002). Aber auch beim mathematischen Erkenntnisgewinn spielen experimentelle Tätigkeiten eine Rolle. Euler (1761) spricht in diesem Zusammenhang von Beobachtungen und Quasi-Experimenten. Er meint damit, dass etwa Eigenschaften natürlicher Zahlen durch Beobachtungen an Beispielen entdeckt werden können. Diese Erkenntnisse werden dann auch anhand von Beispielen experimentell überprüft. Dieser Überprüfung kommt die Bedeutung einer ersten Absicherung des neuen Wissens zu und ist von zentraler Bedeutung, da in der Mathematik viele Erkenntnisse schon lange Zeit als wahr gelten, bevor sie bewiesen werden können. Mathematische Vermutungen entstehen also nicht deduktiv, sondern aus der Anschauung von Beispielen (Heintz 2000). Pólya (1962) knüpft an die Ausführungen Eulers an und zeigt am Beispiel der Goldbachschen Vermutung auf, wie ein solcher experimenteller Erkenntnisweg aussehen kann: Man kann an den Beispielen 3+7=10, 3+17=20 und 13+17=30 unter anderem beobachten, dass jeweils beide Summanden Primzahlen sind und die Summe immer gerade ist. Die Untersuchung weiterer gerader Zahlen (6=3+3, 8=3+5, 10=5+5=3+7, 12=5+7, etc.) kann dann zu der Vermutung führen, dass sich alle geraden Zahlen als Summe von zwei Primzahlen darstellen lassen. Man kommt zu dieser Vermutung also durch „suggestive“ Beobachtungen. Um die Vermutung experimentell abzusichern, kann man nun eine weitere gerade Zahl heranziehen: 60=7+53. Das bezeichnet Pólya als „stützende“ Beobachtungen. Diese beiden Beobachtungsformen lassen sich unter erkenntnistheoretischer Perspektive als Abduktion bzw. Induktion kennzeichnen. Peirce (Peirce & Walther 1967) führt den Begriff der *Abduktion* ein und meint damit die Bildung einer erklärenden Hypothese zu einem (überraschenden) Phänomen. Es wird also neues Wissen generiert. Der *Induktion* schreibt er die Bedeutung der Bestätigung bzw. Falsifizierung einer abduktiv gewonnen Hypothese zu, in Form einer empirischen Prüfung an weiteren Einzelfällen.

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

Die *Deduktion* bringt keine neuen Erkenntnisse hervor, dient aber deren Absicherung durch logische, wahrheitsübertragende Schlüsse. Alle drei Schlussformen spielen in der Mathematik eine bedeutende Rolle. Beim Experimentieren liegt der Fokus auf den für das Mathematiklernen bedeutenderen Teilprozessen des Erkenntnisgewinns, der Abduktion und Induktion (Philipp 2015b, 2013).

Experimentieren als mathematische Tätigkeit kann vor diesem theoretischen Hintergrund als Suche nach Gesetzmäßigkeiten, Mustern und Strukturen verstanden werden. Zentrale Tätigkeiten sind das Erzeugen und Untersuchen von Beispielen und Hypothesen. Die Erkenntnisprozesse können dabei als abduktive und induktive Prozesse charakterisiert werden, d.h. es werden Hypothesen auf der Basis von Beispielen generiert und auf Plausibilität geprüft. Experimentieren in der Mathematik hat also zwei wesentliche Funktionen: eine hypothesengenerierende und eine hypothesenprüfende Funktion. Experimentieren ist damit ein wesentlicher Prozess mathematischen Denkens und genuines Mathematiktreiben. Wenn man nun den Blick auf Lernende richtet, so stellt sich die Frage, ob sich solche experimentellen Prozesse auch beim Mathematiklernen wiederfinden lassen.

2. Wie sieht Experimentieren bei Lernenden aus?

Um zu untersuchen, wie Lernende experimentieren, wurden Schülerinnen und Schüler der Jahrgangsstufen 3,4 und 6 (n=15) sowie Studierende (n=9) bei der Bearbeitung von Aufgaben gefilmt (Philipp 2013). Um gerade jüngeren Kindern das laute Denken zu erleichtern, wurden die Aufgaben teilweise zu zweit bearbeitet. Insgesamt wurden fünf verschiedene Aufgaben mit offener Fragestellung im Rahmen der Untersuchung eingesetzt. Ziel war es, ein möglichst breites Spektrum an Vorgehensweisen zu finden und daraus eine in den Daten verankerte Theorie zu entwickeln (Glaser & Strauss 1998). Am Beispiel der Aufgabe Treppenzahlen (vgl. Abb.1, Leuders 2013) lassen sich Vorgehensweisen von Lernenden beschreiben.

Abbildung 1: Aufgabe Treppenzahlen

Ein erster Zugang erfolgt meist durch das Erstellen und Betrachten von eigenen Beispielen. Typische erste Vermutungen, die sich dann im weiteren Verlauf als nicht richtig herausstellen, sind „Man kann mit allen Zahlen eine Treppe bauen“ oder „Man kann mit geraden Zahlen keine Treppen bauen.“ Das Formulieren von falschen Vermutungen ist im Experimentierprozess besonders wertvoll, da an dieser Stelle deutlich wird, dass es notwendig ist, Vermutungen auch einer Prüfung zu unterziehen. Daneben können sie auch als eine Art Anker dienen. Darauf aufbauend können beispielsweise weitere (auch unterschiedlich spezifische) Vermutungen gebildet werden wie etwa „Es gehen nicht alle geraden Zahlen.“, „Mit der Zahl 4 kann man keine Treppe bauen.“ oder „Man kann mit allen geraden Zahlen eine Treppe bauen.“ Alle Schülerinnen und Schüler konnten Zahlen finden, die man als Treppenzahlen darstellen kann und auch Zahlen, bei denen das nicht möglich ist. Etliche entdeckten auch, dass es die Zweierpotenzen sind, die sich nicht als Treppenzahlen darstellen lassen (vgl. auch Philipp 2014, 2012b). Dahinter steckt der Satz von Sylvester, der besagt, dass jede natürliche Zahl n so viele Darstellungen von Summen aufeinanderfolgender Zahlen hat, wie sie ungerade Teiler besitzt. Dabei wird die Zahl 1 nicht als Teiler gezählt, wohl aber die Zahl n selbst (Sylvester 1882).

Basis für die Analyse der Vorgehensweisen von Lernenden bei der Bearbeitung der Aufgaben bildeten die Arbeitsprodukte (Beispiele und Notizen) und die aufgezeichneten Gespräche. Diese wurden zunächst in einer Phase des freien Kodierens (Glaser & Strauss 1998) interpretiert. Ergebnis dieses Analyseschrittes ist ein umfassendes Kategoriensystem.

Kode	Kodenotiz	Beispiel
Beispielorientierte Hypothese	Hypothese wird direkt in Anknüpfung an ein Beispiel gebildet.	„16 geht nicht. Die Quadratzahlen gehen nicht (als Treppenzahl).“
Gegen-beispiel	Beispiel wird genutzt, um eine Vermutung zu verwerfen oder genauer zu spezifizieren.	„die 10 geht auch als Treppenzahl – also gehen auch gerade Zahlen als Treppenzahlen“
Reihenfolge-beispiel	Beispiele werden in systematischer Reihenfolge ausprobiert.	Die Zahlen von 1 bis 20 als Treppenzahlen darstellen.
Gruppenbildung	Strukturierung des Beispielbereichs.	Betrachtung von geraden und ungeraden Zahlen.
...	...	...

Abbildung 2: Vorgehensweisen von Lernenden

Exemplarisch werden in Abb. 2 einige Vorgehensweisen benannt (Kode), in einer Kodenotiz genauer definiert und durch ein Ankerbeispiel mit Bezug zur Aufgabe Treppenzahlen illustriert. Im nächsten Analyseschritt wurden Beziehungen zwischen solchen Vorgehensweisen genauer betrachtet und Achsenkategorien identifiziert, die als zentrale Tätigkeiten beim Experimentieren aufgefasst werden können. Auf dieser Basis lässt sich ein in den Daten verankertes theoretisches Modell (vgl. Abb. 3) zum Experimentieren in der Mathematik entwickeln (Philipp 2013): (1) Beispiele werden generiert. (2) Um zu einer Vermutung zu kommen, werden Beispiele strukturiert. (3) Eine Hypothese/Vermutung wird formuliert und um sie (4) zu überprüfen, wird wiederum ein Beispiel herangezogen und der Kreislauf kann auf der Basis der gewonnenen Erkenntnisse von neuem beginnen. An dieser Stelle werden die beiden Funktionen von Experimenten, Hypothesengenerierung und Hypothesenprüfung, deutlich.

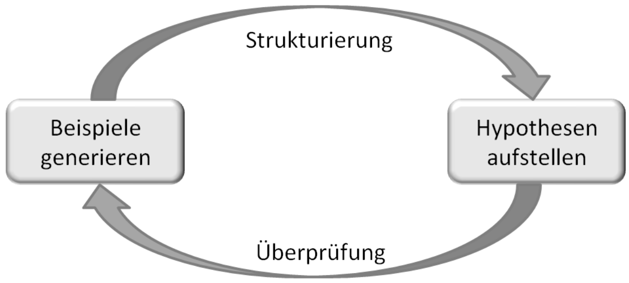


Abbildung 3: Experimentierkreislauf

Es zeigt sich also, dass Lernende ganz ähnlich wie Mathematikerinnen und Mathematiker zu neuen Erkenntnissen gelangen können, wenn sie Mathematiktreiben. Der experimentelle Charakter des Vorgehens zeigt sich im Umgang mit selbst erstellten Beispielen und Vermutungen. Im Hinblick auf Mathematikunterricht ist nun von Interesse, wie sich solche experimentellen Prozesse anregen lassen.

3. Wie kann man im Mathematikunterricht experimentieren?

Zunächst kann man überlegen, welche Aufgaben sich zum Experimentieren eignen. Am Beispiel der Aufgabe Treppenzahlen (vgl. Abb. 1) lassen sich Kriterien identifizieren: (1) Das Phänomen wird mit einer offenen Fragestellung präsentiert, (2) eine Vielzahl von Vermutungen können angestellt werden, die Aufgabe ist also mathematisch reichhaltig und (3) das Generieren von Beispielen ist problemlos möglich. Es sollten also keine komplizierten, fehleranfälligen Algorithmen für das Erstellen der Beispiele erforderlich sein. Häufig kann man Aufgaben aus Lehrmitteln zum Experimentieren nutzen, indem man die Fragestellung öffnet (Philipp 2012a).

Unterstützen kann man Lernende mit einer Unterrichtskultur, die dazu anregt, eigene Fragen an mathematische Phänomene zu stellen. Förderlich ist es auch, wenn Schülerinnen und Schüler ihre Ideen, Beispiele und Lösungen schriftlich festhalten, beispielsweise in einem Forscherheft. Diese Aufzeichnungen können in Phasen des Austauschs und der Reflexion als Grundlage dienen. Eine weitere Möglichkeit ist es, experimentelle Vorgehensweisen (Strategien) explizit zu fördern. Ob eine solche Förderung grundsätzlich möglich ist, wurde im Rahmen einer Interventionsstudie untersucht. Ziel war die Erprobung eines Unterrichtskonzepts zur Förderung experimenteller Strategien (Training) und ihre psychometrische Erfassung zur Überprüfung der Wirksamkeit der Förderung (Philipp 2013).

Basierend auf dem theoretischen Modell des Experimentierens in der Mathematik (vgl. Abb. 3) wurden folgende Impulse für Schülerinnen und Schüler abgeleitet, die den Einsatz experimenteller Strategien zur aktiven Aneignung mathematischen Wissens anregen (Philipp 2015a):

- Schreibe einige Beispiele auf.
- Schreibe Beispiele geordnet auf (z.B. als Liste oder Tabelle).
- Suche eine andere Darstellung (z.B. eine Zeichnung oder Rechnung).
- Schreibe eine Vermutung auf (Was fällt dir auf?).
- Überprüfe deine Vermutung (z.B. Finde ich ein Gegenbeispiel?)

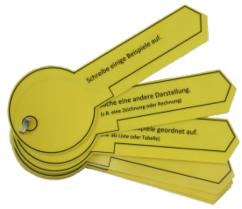


Abbildung 4: Impulsschlüssel

Die Impulse standen den Schülerinnen und Schülern im Rahmen der Intervention als Schlüssel (s. Abb. 4) zur Verfügung und konnten bei der Bearbeitung von Aufgaben verwendet werden. Im Unterricht hatten die Schlüssel dann zweierlei Funktionen. Sie konnten einerseits den Schreibprozess der Schülerinnen und Schüler erleichtern, da sie zur Gliederung der Aufzeichnungen genutzt werden konnten. Andererseits konnten die Schlüssel dazu dienen, Unterrichtsgespräche über die Aufgaben zu strukturieren, indem etwa Reflexionsphasen auf zwei Ebenen unterschieden wurden: *inhaltlich* (z.B. Welche Beispiele habt ihr aufgeschrieben?) und *prozessbezogen* (Welche Schlüssel habt ihr an welcher Stelle verwendet?).

Das Training selbst war in vier Phasen gegliedert, die wichtig Schritte beim Strategieerwerb darstellen (Klauer 1993, Bruder 2003). Nach einer ersten Phase der Hinführung an die Art der Aufgaben (offene Fragestellung, Erstellen eigener Beispiele) wurden die experimentellen Strategien in der zweiten Phase beim Bearbeiten der Aufgabe Treppenzahlen eingeführt und expliziert. Das diente der Verankerung der Strategien. In der dritten Phase sollte die Verwendung der Strategien reflektiert werden. Das geschah anhand eigener Bearbeitungen, aber auch losgelöst vom eigenen Bearbeitungsprozess anhand einer fiktiven Schülerlösung. Die vierte Phase beinhaltete das Verwenden der Strategien beim Bearbeiten weiterer Aufgaben

(Transfer). Eingebettet war das Training in eine Unterrichtseinheit[1] zu den Inhalten Teilbarkeit und Primzahlen. Die Unterrichtseinheit bestand aus insgesamt zwölf Aufgaben. Wesentliche Bausteine zur Unterstützung des Experimentierens waren das Führen eines Forscherheftes und das Kommunizieren über Strategien, Lösungswege und Ergebnisse.

Zentrale Fragestellung der Interventionsstudie war, inwiefern experimentelle Strategien im Mathematikunterricht gefördert werden können. Die Untersuchung fand in einem Zwei-Gruppen-Design mit Experimental- (n=126) und Kontrollgruppe (n=101) in 6. Klassen in Realschulen statt. Die Experimentalgruppe nahm im Rahmen dieser Unterrichtseinheit am Training zur Förderung von experimentellen Strategien teil, während in den Kontrollklassen dieselben Inhalte nach Schulbuch unterrichtet wurden. Alle Klassen wurden von ihrer Mathematiklehrkraft unterrichtet. Um die Wirksamkeit des Trainings zu überprüfen, nahmen beide Gruppen an einem Test zu drei verschiedenen Zeitpunkten teil: direkt vor und nach der Unterrichtseinheit und mit einem Abstand von sechs Wochen ein drittes Mal (vgl. Abb. 5).

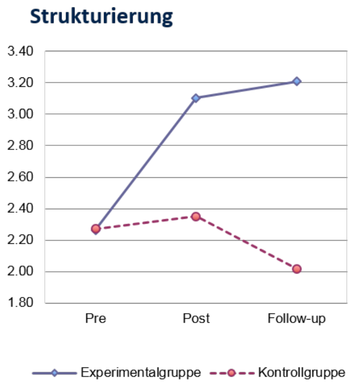
Abbildung 5: Design der Interventionsstudie

Der Kontrolle der Bedingungen der Intervention dienten Maßnahmen wie Unterrichtsbeobachtungen und schriftliche Rückmeldungen der Lehrkräfte zum Einsatz jeder Aufgabe. Das Testinstrument enthielt verschiedene Bausteine (Philipp 2013). In Anlehnung an das theoretische Modell zum Experimentieren in Mathematik (vgl. Abb. 3) gelang es, zwei inhaltliche Dimensionen auch psychometrisch zu trennen: die Dimensionen *Strukturierung* und *Überprüfung* (im Modell repräsentiert durch die beiden Pfeile). Diese beiden Dimensionen beschreiben also die Fähigkeiten von Schülerinnen und Schülern (1) über das Strukturieren von Beispielen zu Vermutungen zu gelangen und (2) Vermutungen anhand selbst generierter Beispiele zu überprüfen. In der folgenden Tabelle ist zu jedem der drei Testzeitpunkte Cronbachs Alpha für beide Skalen angegeben:

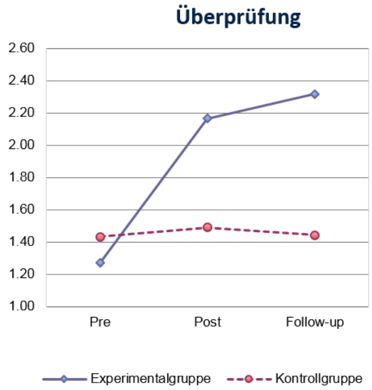
[1] Die hier beschriebene Unterrichtseinheit ist eingebunden in das Forschungsprojekt „Kontexte für sinnstiftenden Mathematikunterricht“ (KOSIMA) unter Leitung von B. Barzel, S. Hußmann, T. Leuders und S. Prediger.

Skala	*Anzahl der Items*	*Pre*	*Post*	*Follow up*
Strukturierung	6	0.66	0.67	0.76
Überprüfung	4	0.71	0.7	0.74

Das Testinstrument enthielt sowohl inhaltsnahe als auch inhaltsferne Items. Zusätzlich wurden mögliche Moderatorvariablen wie beispielsweise die Fähigkeit zum induktiven Denken erfasst. Zur Überprüfung der Wirksamkeit des Trainings wurde in beiden Dimensionen eine Kovarianzanalyse mit Messwiederholung durchgeführt. Es zeigten sich in beiden Dimensionen signifikante Unterschiede zwischen den Gruppen und große Effekte. Die Experimentalgruppe hat einen Zuwachs zu verzeichnen, die Kontrollgruppe nicht. Bemerkenswert ist auch der weitere Zuwachs in beiden Dimensionen zwischen dem zweiten (Post) und dritten (Follow up) Messzeitpunkt. Das Training war also erfolgreich und auch nachhaltig. Die großen Effektstärken (Strukturierung: η^2=0,307; Überprüfung η^2=0,183) lassen sich möglicherweise auch dadurch erklären, dass das zugrunde liegende theoretische Modell stark in empirischen Daten verankert ist und damit sehr nah an Lernprozessen von Schülerinnen und Schülern orientiert ist. Inhaltlich bedeutet dieser Zuwachs im Bereich Strukturierung, dass die Schülerinnen und Schüler, die an dem Training teilgenommen haben, Strukturen besser erkennen und diese auch verbal ausdrücken können. Auch die Anzahl von substanziell unterschiedlichen Vermutungen nimmt in diesem Bereich zu, ebenso wie die Spezifizität der Formulierungen. Im Bereich Überprüfung ist ein sehr viel kritischerer Umgang mit Vermutungen zu beobachten. Gegenbeispiele werden nach dem Training häufiger dazu genutzt, Vermutungen zu verwerfen, auch wenn sich Beispiele finden lassen, für die die Vermutung gilt. Außerdem wird die Notwendigkeit, die Gültigkeit von Vermutungen an mehr als einem Beispiel abzusichern, erkannt. Dass die Kontrollgruppe hier keinen Zuwachs zu verzeichnen hat, belegt, dass dieser nicht durch das Erlernen der Inhalte begründet werden kann.



Effekt	Signifikanz	η2
Zeit*Gruppe	0,000	0,307



Effekt	Signifikanz	η2
Zeit*Gruppe	0,000	0,183

Eine wesentliche Erkenntnis, die Schülerinnen und Schüler beim Experimentieren gewinnen können, ist, dass Vermutungen nicht nur manchmal gelten können. Jede Aussage ist entweder wahr oder falsch (Prinzip der Zweiwertigkeit). In engem Zusammenhang damit steht die Feststellung, dass ein Gegenbeispiel genügt, um eine Vermutung zu widerlegen (Beweiskraft eines Gegenbeispiels) während bestätigende Beispiele noch keine Beweiskraft haben. Auf diese Weise kann auch ein Beweisbedürfnis bereits in der Primarstufe angebahnt werden. Experimentieren kann also als fundamentale mathematische Tätigkeit gesehen werden, die das Entdecken neuen Wissens schon früh ermöglicht.

Literatur

Bruder, R. (2003): *Methoden und Techniken des Problemlösenlernens*. Material im Rahmen des BLK-Programms „SINUS“ zur „Steigerung der Effizienz des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts“. Kiel: IPN.

Euler, L. (1761). *Specimen de usu observationum in mathesi pura*: (Example of the use of observation in pure mathematics). In Novi Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae (Vol. 6, pp. 185–230). Anonymos.

Glaser, B. G., & Strauss, A. A. L. (1998). *Grounded theory: Strategien qualitativer Forschung*. Bern: Huber.

Heintz, B. (2000): *Die Innenwelt der Mathematik*. Zur Kultur und Praxis einer beweisenden Disziplin. Springer-Verlag, Wien.

Klauer, K. J. (Hrsg.). (1993). *Kognitives Training*. Göttingen: Hogrefe.

Leuders, T. (2013). *Zahlen unter der Lupe*. In S. Prediger, B. Barzel, S. Hußmann, & T. Leuders (Hrsg.), mathewerkstatt 6. Berlin: Cornelsen.

Philipp, K. (2015a). Muster und Strukturen. In J. Leuders & K. Philipp (Hrsg.). *Mathematik – Didaktik für die Grundschule.* Cornelsen: Scriptor, 74-87.

Philipp, K. (2015b). Teilbarkeit experimentell erkunden. In *MU – Der Mathematikunterricht* 2 / 2015, S. 5 – 11. Friedrich, Seelze.

Philipp, K. (2014). Individuelle Lernwege unterstützen – Mit Zahlen experimentieren. *Praxis der Mathematik (PM)*, 58, 40-44.

Philipp, K. (2013): *Experimentelles Denken*. Theoretische und empirische Konkretisierung einer mathematischen Kompetenz. Wiesbaden: Springer-Spektrum.

Philipp, K. (2012a). „Die könnten doch auch UHU-Zahlen heißen!“ – Zahlenmuster experimentell erkunden. *Sache-Wort-Zahl*, Heft 124, 27-35.

Philipp, K. (2012b). Mit Zahlen experimentieren – Individuelle Lernwege unterstützen. *Die neue Schulpraxis*, Heft 10, 45-49.

Peirce, C. S./ Walther, E. (Hrsg.) (1967): *Die Festigung der Überzeugung und andere Schriften*. Agis Verlag GmbH, Baden-Baden.

Pólya, G. (1962). *Induktion und Analogie in der Mathematik*. Wissenschaft und Kultur. Basel etc.: Birkhäuser.

Shadish, W., Cook, T., & Campbell, D. (2002). *Experimental and Quasi-Experimental Designs for Generalized Causal Inference*. Boston: Houghton Mifflin.

Sylvester, J.J. (1882). A constructive theory of partitions, arranged in three acts, an interactand an exodin. *American Journal of mathematics*, 5, 251-330.