

Franz PICHER, Klagenfurt

Zur Bedeutung des Integral-Begriffs im Rahmen von Schulmathematik

In diesem Beitrag wird diskutiert, wie durch eine reflektierte Betrachtung des Integral-Begriffs am Ende der schulischen Laufbahn einerseits eine rückblickend-abschließende und andererseits eine ausblickende Reflexion in Bezug auf Schulmathematik geleistet werden kann. Als – insbesondere aus bildungstheoretischer Sicht – bedeutsam werden hierbei einerseits ein pragmatisch-anwendungsorientierter Aspekt und andererseits ein erkenntnistheoretischer Aspekt identifiziert. In der Auseinandersetzung mit diesen beiden Aspekten erweist sich sodann der Übergang von der Vorstellung des Integrals als Flächenbilanz zur Betrachtung des Integrals als theoretische Erweiterung des Messens als der Sache dienlich.

1. Realitäten

Befragungen von Studienanfänger(inn)en des Lehramts Mathematik zum Integral-Begriff durch den Autor erzeugen bei diesem zuweilen ein gewisses Unbehagen, wenn die Beschreibung einer neuen Rechenoperation, mit der man Flächeninhalte unter Funktionsgraphen berechnen kann, im Zentrum der Antworten steht und ein reflektierter Blick fehlt: Was tut man mit diesem Begriff? Welcher Zusammenhang besteht zur bisher gelernten Mathematik? Was ist neu? Fragen wie diese (und damit eine horizontale wie vertikale Vernetzung in Bezug auf andere Gebiete der Schulmathematik) bieten sich gerade im Rahmen der Beschäftigung mit dem Integral-Begriff am Ende der schulischen Laufbahn an.

Der ‚übliche‘ Umgang mit dem Integral-Begriff soll kurz als (zu) unreflektiert, als zu kalküllastig und damit nicht dem Alter der Lernenden entsprechend, charakterisiert werden. Es sei hierzu auf Worte von Hartmut Köhler verwiesen, der zu „mancher zähen Diskussion im Analysisunterricht“ die Frage stellte, ob „diese Situation in der Oberstufe nicht daher rühren [könnte], dass man die Schüler jahrelang geistig unterforderte bei gleichzeitiger Überforderung durch eine inhumane Bürokratisierung des Lernprozesses“ (Köhler 2006, S. 7 f.).

These: Der Inhalt ‚Integral-Begriff‘ ist (gerade ob seiner *Schwierigkeit* und *Bedeutung*) der Schulstufe angemessen, nicht aber der übliche Umgang mit diesem. Die Beschäftigung mit dem Integral-Begriff stellt einen *unbewusst* vollzogenen Abschluss in der Beschäftigung mit Mathematik in der Schule dar, der (für) die Beteiligten passiert.

2. Desiderata

Leitend für die folgenden ‚Entwürfe‘ ist eine Idee von ‚Bildung‘ als ein ‚Sich-Bilden‘ des Individuums und daher eine Auseinandersetzung mit Mathematik, die nicht vom Menschen entkoppelt ist, sondern vielmehr gerade das „Verhältnis von Mensch und Wissen“ (Fischer & Malle 2004, S. 7) in den Mittelpunkt stellt. Da der Mensch nicht für sich alleine gedacht werden kann, spielt aus dieser Sicht die Berücksichtigung von „Grundrelationen, in denen Menschen leben“ (Vollrath & Roth 2012, S. 5), und dabei insbesondere der Mensch in seinen Beziehungen zu (Um-)Welt und Gesellschaft, eine wichtige Rolle.

Im Rahmen der Beschäftigung mit dem Integral-Begriff kann Obiges durch die explizite Behandlung der Frage nach dem Sinn anhand zweier im österreichischen Mathematik-Lehrplan für die Sekundarstufe II genannter Aspekte der Mathematik, die Schülerinnen und Schüler erkennen sollen, bedient werden: Es sind dies einerseits ein *pragmatisch-anwendungsorientierter Aspekt (Aspekt 1)* und andererseits ein *erkenntnistheoretischer Aspekt (Aspekt 2)*. (Die spezifische Ausdifferenzierung der beiden Aspekte im vorliegenden Beitrag unterscheidet sich zum Teil von derjenigen im genannten Lehrplan.)

Dadurch kann sodann sowohl der geforderten Beschäftigung mit den Grundrelationen genüge getan werden (Aspekt 1 stellt die Rolle von Mathematik in Welt und Gesellschaft ins Zentrum, Aspekt 2 den Erkenntnis-suchenden Menschen) als auch ein ‚alters-angemessener‘ Abschluss und Ausblick in Bezug auf Schulmathematik gefunden werden. Dienlich ist dabei eine begriffliche Entwicklung in der Behandlung des Integrals – ausgehend von der (zumeist vorhandenen) (Grund-)Vorstellung des *Integrals als Flächenbilanz* (Aspekt 1), hin zu allgemeineren Überlegungen zum *Integral als theoretische Erweiterung des ‚Messens‘* (Aspekt 2).

These: Leitend für die schulische Beschäftigung mit dem Integral im Sinne der genannten Desiderata können ein *pragmatisch-anwendungsorientierter Aspekt* (Integral als *Flächenbilanz*) auf der einen Seite und ein *erkenntnistheoretischer Aspekt* (Integral als theoretische Erweiterung des *Messens*) auf der anderen Seite sein.

3. Entwürfe: Pragmatisch-anwendungsorientierter Aspekt

In vielen Anwendungen spielt die Visualisierung des verwendeten mathematischen Modells in Form der Darstellung von Funktionsgraphen eine wesentliche Rolle, insbesondere hinsichtlich des Verständnisses der Bedeutung des gewählten Modells im gegebenen Kontext. In der Schulmathematik spielt daher die Beschäftigung mit Funktionsgraphen in Anwendungs-

zusammenhängen zurecht eine wichtige Rolle. Im Rahmen des pragmatisch-anwendungsorientierten Aspekts in der Beschäftigung mit dem Integral-Begriff wird die Auseinandersetzung mit der Analyse von Funktionsgraphen dahingehend weitergeführt, dass nun auch Flächen ‚unter‘ Funktionsgraphen betrachtet werden, denen in vielen Anwendungskontexten eine Bedeutung zugeschrieben werden kann. Dies bedeutet einen vorstellungsorientierten Zugang zum *Integral als Flächenbilanz*. Als mögliche Kontexte können dabei etwa die folgenden dienen:

- *Beschreibung von Bewegungen*: In einem Geschwindigkeits-Zeit-Diagramm beschreibt die Fläche unter dem Graphen der Geschwindigkeits-Funktion den zurückgelegten Weg.
- *Darstellung von Steuertarifen*: Die Fläche unter der Funktion des Grenzsteuersatzes in Abhängigkeit vom zu versteuernden Einkommen beschreibt die insgesamt zu zahlende Steuer.
- *Gini-Index*: Die Fläche zwischen erster Mediane und Lorenzkurve (ordnet jedem Anteil der Bevölkerung, geordnet nach steigendem Einkommen, den Einkommensanteil dieser Bevölkerungsgruppe am Gesamteinkommen zu) ist ein Maß für die wirtschaftliche Ungleichheit in einem Land.
- *Konsumentenrente*: Die Konsumentenrente (Differenz zwischen den kumulierten individuellen Wertschätzungen eines Gutes und dem sich am Markt einstellenden Gleichgewichtsumsatz) ist als Fläche im Preis-Menge-Diagramm veranschaulichbar.

In Bezug auf die genannten Anwendungskontexte bieten sich einerseits rückblickend-abschließende und andererseits ausblickende Reflexionsanlässe in Bezug auf (Schul-)Mathematik, etwa betreffend

- die Zuordnung von Zahlen (Rückblick),
- die Interpretation von Produkten bzw. Flächeninhalten (Rückblick),
- die Verwendung von grafischen Darstellungen (Rückblick),
- die funktionale Beschreibung eines Zusammenhangs (Rückblick),
- die Darstellung von Größen durch Längen (Rückblick),
- die Interpretation von Funktionsgraphen (Rückblick, *NEU: Fläche*),
- *die funktionale Beschreibung der Flächenbilanz (NEU)*,
wobei die *Flächenbilanz ihrerseits eine Größe repräsentieren kann, die eigentlich relevant ist (kumulierte Größe) (NEU)*.

4. Entwürfe: Erkenntnistheoretischer Aspekt

Die in Anwendungskontexten als zentral beschriebene Interpretation des Integrals als Flächenbilanz kann als Grundlage für eine weiterführende, reflektierte Betrachtung des *Integrals als theoretische Erweiterung des Messens* dienen. Als Einstieg bietet sich auch hier zunächst eine rückblickend-abschließende Reflexion in Bezug auf (Schul-)Mathematik an. Fragen, mit denen man sich hierbei beschäftigt, lauten etwa:

- Wo beschäftigten wir uns im Mathematikunterricht mit Flächenberechnungen? In welchen Schulstufen? Bei welchen Inhalten?
- Wofür standen die Flächen jeweils?
- Finden Sie Beispiele, wo die Fläche für etwas anderes stand – also nicht die Maßzahl der Fläche an sich interessierte, sondern etwas anderes!
[Man denke etwa an: Rechtecksinhalt als Metapher für die Multiplikation, Kreisdiagramm, Histogramm, Wahrscheinlichkeit als Fläche unter der Dichtefunktion, Flächeninhalt eines Parallelogramms als Länge des Kreuzprodukt-Vektors.]

Im Rahmen der schulischen Behandlung des Integral-Begriffs kommen dann neue Aspekte hinzu, die in den Fokus der Betrachtungen gerückt werden können, wie etwa

- die funktionale Beschreibung des Flächeninhalts,
- die Definition des Flächeninhalts unter integrierbaren Funktionen (im Unterschied zur ‚naiven‘ Sicht der Pre-Existenz des Inhalts),
- die Exaktifizierung der Flächenberechnung mittels Grenzwertüberlegungen (zuvor anschauliche Überlegungen, etwa beim Kreis), und damit
- der Rückblick auf die schrittweise Erweiterung in der Betrachtung (Interpretation) von Funktionsgraphen.

Die Betrachtung des Integrals als theoretische Erweiterung des Messens ermöglicht sodann auch Ausblicke auf höhere Mathematik (Maßtheorie) sowie Einblicke in Geschichte und Philosophie der Mathematik.

Literatur

- Fischer, R. & Malle, G. (2004). *Mensch und Mathematik*. München – Wien: Profil.
- Köhler, H. (2006). Bildung – nicht Standardisierung. *Mathematica didactica* 29 (2), S. 3–23.
- Vollrath, H.-J. & Roth, J. (2012). *Grundlagen des Mathematikunterrichts in der Sekundarstufe*. 2. Auflage. Heidelberg: Spektrum.