Martin RATHGEB, Siegen

Können wir von Kreisen das Rechnen und Beweisen lernen? Experimente zur Entweder-Oder-Unterscheidung

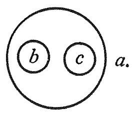
George Spencer-Brown [GSB] führt mit seinen „Laws of Form“ [LoF] (1969) den Leser ausgehend vom empraktischen Wissen übers Unterscheiden/Bezeichnen hin zum logischen Rechnen – und wieder zurück. Dabei wird der Leser mathematisch sozialisiert und der Anfang des Buches durch sein Ende reichhaltiger. Zielpublikum ist nach Auskunft des Autors einerseits der (fachmathematische) Laie und andererseits der (mathematikphilosophische) Profi. Denn der Autor behandelt die Aussagenlogik einerseits als eine *Einführung* in die Mathematik und andererseits als eine *Grundlegung* von Mathematik. Dabei entwickelt er sein Thema auf ungewohnte, doch letztlich faszinierende Weise.

Im Folgenden thematisiere ich GSBs *Illustrationen und Experimente mit Kreisen*: Durch sie *zeigt* er, dass erst die Lesart aus einem *Arrangement* einen *Ausdruck* macht und dass Lesarten auf zum Teil impliziten Konventionen beruhen (vgl. 1.). Durch sie *rechtfertigt* er die Initiale seiner *cross*-Arithmetik (vgl. 2.) und *reflektiert* die Entweder-Oder-Unterscheidung, auf welcher das Beweisen per Fallunterscheidung gründet und damit letztlich GSBs Einführung in bzw. Grundlegung von Mathematik (vgl. 3.).

1. Drei Kreise auf einer Kugel: Die (Un-)Bestimmtheit der Lesart

In den Endnoten zu Kapitel 12 von LoF betrachtet GSB Kreise auf einer Kugel und liest dieses Kreise-Kugel-Arrangement als Term einer mathematischen Sprache, die Buchstaben und Kreise umfasst und auf einer Kugel(oberfläche) notiert wird. Er führt seine Notation folgendermaßen ein.

„Let us imagine that, instead of writing on a plane surface, we are writing on the surface of the Earth. Ignoring rabbit holes, etc, we may take it to be a surface of genus 0. Suppose we write

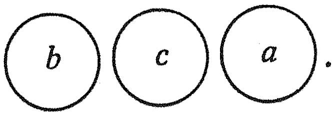


To make it readable from another planet, we write it large. Suppose we draw the outer bracket round the Equator, and make the brackets containing *b* and *c* follow the coastlines of Australia and the South Island of New Zealand respectively.“ (LoF:102)

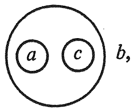
GSB bringt seinen Notationsvorschlag im Plauderton und m.E. recht unterhaltsam vor. Doch worauf will er hinaus? Zunächst sei gesagt: Es wird nicht darum gehen, den Term tatsächlich von einem anderen Planeten aus zu lesen, sondern von (vier) verschiedenen Positionen auf der Erde.

„Above is how the expression will appear from somewhere in the Northern Hemisphere, say London. But let us travel.

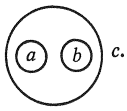
Arriving in Cape Town we see



Sailing on to Melbourne, we see



and proceeding from there to Christchurch, we see



These four expressions are distinct and not equivalent.“ (LoF:102f.)

Der letzte Satz ist nicht selbstverständlich, sondern eigentlich informativ. Denn die Bedeutungen der Zeichen sind im Zitat selbst nicht spezifiziert. Skizzieren wir nochmals die Situation. Wir denken uns auf der Erde sechs Markierungen angebracht: drei Linien und drei Buchstaben. Als kleines Modell mag uns eine Kugel dienen, auf die wir in geeigneter Weise Kreise und Buchstaben notieren. Die Kugeloberfläche dient uns als Notationsfläche, in/auf der wir uns bewegen können. GSB betrachtet das Kreise-*Kugel*-Arrangement von vier Punkten auf der Kugel aus und notiert als Kreise-*Ebene*-Arrangement, das jeweilige Inklusionsverhältnis zwischen den Markierungen. Bspw. liest die *a*-Markierung ein Beobachter in London außerhalb des Äquatorkreises, auf der Südhalbkugel dagegen innerhalb. Bspw. liest die *b*-Markierung ein Beobachter in Melbourne außerhalb der australischen Küstenlinie, außerhalb von Australien dagegen innerhalb. Der Beobachter steht jeweils außen und es spiegeln die Kreise in der Ebene wider, welche Linien-Markierungen er überqueren muss, um von seiner Position aus zu einer Buchstaben-Markierung zu gelangen.

Dem *einen* Kreise-Kugel-Arrangement korrespondiert je nach Position des Beobachters/Lesers ein anderes Kreise-Ebene-Arrangement. Jedes der vier *Arrangements* (Terme) kann als ein *Ausdruck* (Termfunktion) gelesen werden, d.h.: als ein Zeichen mit einer wohlbestimmten Bedeutung. Der *Wert* des *einen* (doch *vier*-fältig explizierten) Kreis-Kugel-Arrangements ist demnach ohne weitere Spezifikation der Position des Lesers *nicht* wohlbestimmt. Ich setze die Zitation – ihren letzten Satz aufgreifend – fort.

„These four expressions are distinct and not equivalent. Thus it is evidently not enough merely to write down an expression, even on a surface of genus 0, and expect it to be understood. We must also indicate where the observer is supposed to be standing in relation to the expression. Writing on a plane, the ambiguity is not apparent because we tend to see the expression from outside of the outermost bracket. When it is written on the surface of a sphere, there may be no means of telling which of the brackets is supposed to be outermost. In such a case, to make an expression meaningful, we must add to it an indicator to present a place from which the observer is invited to regard it.“ (LoF:103)

Im Hinblick auf das ganze Zitat gilt es die Formulierung „readable from another planet“ nochmals zu bedenken. GSB nennt damit nicht die Position des Lesers, sondern lediglich einen Grund für die gigantische Schriftgröße. Ihr zufolge erstreckt sich das notierte Arrangement über die gesamte Erdoberfläche und befindet sich jeder irdische Leser *in* dem Arrangement. Mit dieser künstlichen Situation weist GSB darauf hin, dass wir uns auch als Leser üblicher Arrangements zu diesen Arrangements positionieren, *indem* wir sie lesen. Durch unsere Lesart definieren wir dem Arrangement einen Außenraum, *in dem* wir sie lesen (vgl. LoF Kapitel 8 und 12).

GSB gibt also ein mathematisches Modell dafür, dass es auf die Lesart der Zeichen ankommt, dass also Zeichen im Wesentlichen standpunktbezogen fungieren. Dies gilt m.E. nicht nur für die Notationsformen in LoF, sondern für mathematische Notationen insgesamt und im übertragenen Sinne auch für den lebensweltlichen Zeichengebrauch. Denn letzterer ist wohlgemerkt weit weniger durch explizite Konventionen reglementiert als ersterer.

2. Kreise in einer Ebene: Rechtfertigung arithmetischer Initiale

In Kapitel 12 von LoF *experimentiert* GSB mit einer *circle*-Notation für zwei Werte: nämlich *ein* oder *kein* Kreis in einer Ebene. Er *diskutiert* vier Ausdrücke, nämlich einen Kreis in einer Ebene, dessen beide Seiten (Außen- und Innenseite) jeweils durch *einen* oder *keinen* Kreis markiert sind. Indem GSB für diese vier Ausdrücke (bestehend aus einem [1x], zwei [2x], drei [1x] Kreisen) jeweils ‚den‘ Wert ‚bestimmt‘, *rechtfertigt* er insb. die beiden *Äquivalenzpostulate* der *cross*-Arithmetik, wonach – formuliert für die *circle*-Notation – zwei *außerhalb* einander stehende Kreise vom selben Wert wie *ein* Kreis sind und zwei *innerhalb* einander stehende Kreise vom selben Wert wie *kein* Kreis sind. Die *cross*-Arithmetik (vgl. LoF Kapitel 3 und 4) *ist* demnach, so man möchte, das Rechnen mit Kreisen.

3. Ein Kreis in einer Ebene: Die Entweder-Oder-Unterscheidung

In Kapitel 1 von LoF definiert und erläutert GSB den Grundbegriff seiner Einführung in bzw. Grundlegung von Mathematik folgendermaßen.

„*Distinction is perfect continence*. That is to say, a distinction is drawn by arranging a boundary with separate sides so that a point on one side cannot reach the other side without crossing the boundary. For example, in a plane space a circle draws a distinction." (LoF:1)

Durch diese Definition zzgl. ihrer Erläuterung ist GSBs *distinction*-Begriff nicht geklärt – weder im Ganzen noch im Detail. In meiner Dissertation habe ich daher die LoF einer transzendentalen Argumentation unterzogen: Welche *Bedingungen ermöglichen* die Beweise der Theoreme? Weshalb vertraut GSB in seinem mathematikphilosophisch anspruchsvollen Ansatz auf die umstrittene Methode des *Beweisens mittels Fallunterscheidung*? Meine kurze Antwort ist: Der *distinction*-Begriff *ist* das Konzept der Fallunterscheidung, nämlich die *Entweder-Oder-Unterscheidung*, bei welcher der *Zusammenhang des zu Unterscheidenden* (präsentisch) *vollzogen wird*. Kommen wir auf die adäquate Deutung der Illustration durch einen Kreis in der Ebene zurück. Die Kreislinie ist eine Grenze mit zwei Seiten. Die Grenze zusammen mit ihren beiden Seiten *ist* die Ebene, in der sich der Kreis befindet und die durch die Grenze partitioniert wird. Dementsprechend ist für Beweise mittels Fallunterscheidung entscheidend, dass nicht nur die beiden Teile (vgl. die Seiten) einer Einheit (vgl. die Ebene) je einzeln untersucht werden können, sondern dass dabei ihr Zusammenhang (vgl. die Grenze) nicht vergessen wird. Die Grenze fungiert *trennend* und *verbindend* zugleich. Beweise mittels Fallunterscheidung umfassen eine gelingende Analyse sowie eine gelingende Synthese. Damit schließt sich ein thematischer Kreis. Indem nämlich ein Kreis in einer Ebene einerseits als Unterscheidung *in* der Ebene und andererseits als Bezeichnung der Ebene *selbst* gelesen werden kann, illustriert er zudem, dass es die Lesart ist, die aus dem Arrangement einen Ausdruck macht. Entscheidend ist, was wir zu sehen vermögen (insb. sehen *können*) und zu sehen bereit sind (insb. sehen *wollen*). In diesem Sinne können wir durch GSBs Experimente mit Kreisen tatsächlich einiges *über* das Rechnen und das Beweisen (kurz: über Mathematik) lernen – so wir sie geeignet lesen.

Literatur

Spencer-Brown, G. (1969). *Laws of Form*. London: George Allen and Unwin Ltd.

Rathgeb, M. (2016). *George Spencer Browns Laws of Form zwischen Mathematik und Philosophie.* Erscheint in: Siegener Beiträge zur Geschichte und Philosophie der Mathematik. Siegen: universi.