

Thomas ROYAR, Christine STREIT, Liestal

## **Determinanten von Operationsverständnis – Das spezifische fachdidaktische Wissen von Lehrpersonen**

### **1. Rahmung**

Obwohl mehrfach auf den Zusammenhang zwischen Operationsverständnis und Rechenleistung hingewiesen wird (Radatz, 1989; Moser Opitz, 2005; Schäfer, 2005; Royar, 2013) und eine hohe Bedeutsamkeit von Operationsverständnis in Bezug auf Rechenschwierigkeiten angenommen wird (Geary, Hoard & Hamson, 1999; Jacobs & Petermann, 2003), wird das Operationsverständnis in Testverfahren bislang gar nicht oder nur am Rande erfasst. Beispielsweise untersucht Freesemann (2014) Operationsverständnis lediglich als Teilbereich innerhalb eines allgemeinen Mathematikleistungstests mit wenigen Items, die lediglich eine paarweise Zuordnung von Darstellungen aus unterschiedlichen Bereichen - etwa einer verbal beschriebenen Handlung und einer symbolischen Darstellung - erfordern.

Möglicherweise liegt eine Ursache der unspezifischen Erfassung von Operationsverständnis in der Schwierigkeit der theoretischen Präzisierung dieses Konstruktes. Korff (2008, S.13) etwa definiert Operationsverständnis als „Integration von Handlungserfahrungen und Vorstellungsbildern in operative Handlungen auf der Symbolebene“. Hier stellt sich die Frage, was genau unter Erfahrungen, Vorstellungen und Handlungen in Bezug auf das Operationsverständnis zu verstehen ist und in welcher Form sich diese manifestieren. Der Einbezug von drei bis fünf unterschiedlichen Repräsentationsmodi für Handlungen, Ikonisierungen und Symbolisierungen erhöht zudem die möglichen Störgrößen in der Erfassung.

So fehlt bislang ein Instrument, welches Antwort auf die Frage geben kann, wann ein Kind tatsächlich Operationsverständnis erlangt hat und wann Defizite bestehen, die zur Intervention Anlass geben. Zumindest für den Bereich des Multiplikationsverständnisses ist es kürzlich gelungen, dieses als Fähigkeit zu operationalisieren, unterschiedlich repräsentierten außermathematischen Kontexten einen passenden Term der Form  $a \cdot b$  zuzuordnen (Royar, Ziska & Streit, 2014).

Ziel der vorliegenden Untersuchung ist es, das Multiplikationsverständnis der Kinder in Zusammenhang mit dem spezifischen Lehrerwissen zu betrachten. Als Hypothese (in Anlehnung an Krauss et al., 2011) formulieren wir, dass spezifisches Lehrerwissen über den Mediator Operationsverständnis die Rechenleistungen von Grundschulern positiv beeinflusst.

## 2. Spezifisches Lehrerwissen zum Operationsverständnis

Ausgehend von der Konzeptualisierung des fachdidaktischen Wissens nach Krauss et al. 2008 werden für die vorgestellte Untersuchung folgende Elemente zum mathematikdidaktischen Wissen einer Lehrperson subsumiert:

- *Wissen über das Verständlichmachen mathematischer Inhalte*  
Dieses Wissen wird durch Aufgaben operationalisiert, die auf eine Beschreibung konkreter (Unterrichts)Massnahmen zur Förderung des Operationsverständnisses der Grundrechenarten abzielen. Insbesondere fällt darunter die Anregung von Bedeutungszuweisungen zwischen Termen und kontextualisierten Inhalten.
- *Wissen über Schülerkognitionen*  
Zur Operationalisierung von Wissen über Schülerkognitionen werden Aufgaben gewählt, die eine Beurteilung von Schülerlösungen zu Intermodalitätsaufgaben verlangen.
- *Wissen über Aufgaben*  
Das Wissen über Aufgaben wird durch Aufgaben operationalisiert, die eine Klassifikation und Weiterentwicklung von Schulbuchaufgaben im Hinblick auf einen notwendigen Repräsentationswechsel erfordern.

## 3. Entwicklung eines Fragebogens zur Erfassung des Lehrerwissens

Um passende Aufgabenstellungen zu jedem dieser drei Elemente zu entwickeln, wurden Experten (Mathematikdidaktiker mit unterschiedlichen Arbeitsschwerpunkten, Mathematikdozierende und Mathematiklehrkräfte unterschiedlicher Schulstufen) herangezogen. Konsens bestand darin, dass ein zentraler Punkt zur Förderung des Operationsverständnisses die Anregung von Bedeutungszuweisungen zwischen Termen und kontextualisierten Inhalten (intermodalen Transfer) ist. Außerdem sollten Lehrpersonen in der Lage sein, die Bedeutungszuweisungen kriterienbezogen werten zu können (Wissen über Schülerkognitionen) sowie Aufgaben für Schüler auszuwählen oder zu konstruieren, die diese Bedeutungszuweisungen einfordern (Wissen über Aufgaben). Hiervon ausgehend wurde ein erster Fragebogen mit 60 Items konstruiert, der von etwa 100 Studierenden mit absolvierten Studieninhalten zum mathematischen Anfangsunterricht bearbeitet wurde. Als Bezugsnorm für die offenen Items wurde eine Expertennorm herangezogen (Seidel et al., 2010). Bei Auswertung der Daten zeigte sich Überarbeitungsbedarf des Fragebogens. Daraufhin wurden mit 10 Testpersonen kognitive Interviews (Willis 2005) geführt, in denen diese ihre Antworten

auf die Fragen erläuterten und begründeten. Hiervon ausgehend wurden die Fragestellungen modifiziert, insbesondere in Bezug auf die Einschätzungen der Schülerantworten. So zeigte sich, dass Termini wie „problematisch“ oder „gelingen“ nicht nur auf den eigentlich gemeinten Kontext bezogen, sondern subjektiv interpretierend erweitert wurden. Entsprechend wurde im Folgenden nicht nach kategorischen Wertungen („welcher Darstellungswechsel ist gelungen?“), sondern nach Handlungsoptionen („bei welcher Schülerantwort würden Sie nachhaken?“) gefragt. Eine ähnliches Vorgehen wurde bei der Auswahl „geeigneter“ Aufgaben zum Training des Darstellungswechsels gewählt: Statt diese nur als „geeignet“ oder „nicht geeignet“ zu kategorisieren, musste bei der überarbeiteten Version eine begründete Auswahl aus einem Pool erfolgen - mitsamt einer Spezifizierung der Aufgabenstellung für die Schüler. Durch diese Modifizierungen gewannen die Items deutlich an Trennschärfe, während gleichzeitig die Gesamtreliabilität gesteigert werden konnte.

*Beispielaufgabe:* Wählen Sie aus den Vorlagen **vier** aus (*es wurden 8 Vorlagen auf Kärtchen präsentiert, darunter z. B. Punktefelder, Zahlenmauern, Texte, „bunte Hunde“ und Bilder*)! Aus diesen konstruieren Sie bitte Aufgaben, mit denen Kinder den Wechsel der Darstellungsformen üben sollen.

Im zweiten Durchgang wurde die Zahl der Items zudem auf 45 reduziert, die Zahl der Teilnehmenden lag bei 89.

#### **4. Auswertung und erste Ergebnisse**

Die Auswertungskriterien wurden ebenfalls durch Expertenratings festgelegt. Alle Items wurden mindestens dreistufig zwischen 0 und 2 Punkten, einige Items vier- oder fünfstufig gewertet. Maximal konnten 95 Punkte erreicht werden, wobei die tatsächlich erreichte maximale Punkteanzahl 75 betrug, das Minimum lag bei 34 Punkten. Fünf Items wiesen einen Schwierigkeitsgrad unter 15% aus und wurden in die weiteren Analysen nicht mehr mit einbezogen. Inhaltlich konnten aus den offenen Aufgabenstellungen drei grundsätzliche Arten von Reaktionen auf Schülerdarstellungen zu Multiplikationstermen bzw. Anregungen zur Sinnstiftung identifiziert werden:

- Undifferenzierte Akzeptanz beliebiger Darstellungen und unspezifische Aufgabenstellungen, z. B. die Auswahl von „bunten Hunden“.
- Stark selektive Akzeptanz einzelner Darstellungen und eng directive Aufgabenstellungen, z. B. fragend-entwickelnde Settings mit

„zu erwartenden bzw. zu findenden“ Signalwörtern seitens der Kinder.

- Differenzierte Akzeptanz einzelner Darstellungen und differenzierte Aufgabenstellungen, z.B. öffnende Fragen zu Begründungen oder Alternativen.

Über die 40 Items hinweg lag Cronbachs Alpha bei .67, durch Eliminieren weniger trennscharfer Items ist ein Wert von .76 realisierbar. Hier erfolgt zurzeit eine differenziertere inhaltliche Analyse mit der Zielsetzung, den Fragebogen in Bezug auf Validität und Reliabilität dahingehend zu optimieren, dass er in einer Feldstudie zur Messung des spezifischen fachdidaktischen Wissens von Lehrpersonen in Bezug auf das Multiplikationsverständnis eingesetzt werden kann.

## 5. Ausblick

Die Untersuchungen zum spezifischen fachdidaktischen Wissen von Lehrpersonen in Bezug auf das Operationsverständnis stehen in einem größeren Zusammenhang, in dem dieses Wissen, das Vorwissen der Kinder und das Operationsverständnis der Kinder als interdependente Determinanten der Rechenleistung untersucht werden. Die Autoren erhoffen sich so mittelfristig Erkenntnisse zu handlungswirksamen Aus- und Weiterbildungsinhalten für Primarstufenlehrpersonen.

## Literatur (Auswahl)

- Freeseemann, O. (2014). *Schwache Rechnerinnen und Rechner fördern. Eine Interventionsstudie an Haupt-, Gesamt- und Förderschulen*. Berlin: Springer.
- Korff, N. (2008). *Entwicklung, Diagnose und Frühförderung mathematischer Kompetenzen im Elementar- und Primarbereich*. <http://www.mathedidaktik.uni-bremen.de/pdf/handbuch-elementarmathematik-diagnose.pdf>
- Krauss S., et al. (2011). Konzeptualisierung und Testkonstruktion zum fachbezogenen Professionswissen von Mathematiklehrkräften. In M. Kunter et al. (Hrsg.): *Professionelle Kompetenz von Lehrkräften: Ergebnisse des Forschungsprogramms COACTIV*, (S. 135-161). Münster: Waxmann.
- Royar, Th. (2013). *Handlung – Vorstellung – Formalisierung. Entwicklung und Evaluation einer Aufgabenreihe zur Überprüfung des Operationsverständnisses für Regel- und Förderklassen*. Hamburg: Kovac.
- Royar, Th., Ziska, S., Streit, Ch. (2014). Entwicklung eines Instruments zur Erfassung des Operationsverständnisses der Multiplikation. In Roth, J., Ames, J. (Hrsg.): *Beiträge zum Mathematikunterricht*, (S. 1019-1022). Münster: WTM.