

Christian RÜTTEN, Essen

Negative Zahlen im Kontext des Thermometers

1. Thermometrie als Instruktionskontext für negative Zahlen

Im Hinblick auf die in der Sekundarstufe vorzunehmenden Zahlbereichserweiterungen lässt sich eine Tendenz erkennen, negative Zahlen vor oder parallel zur Bruchrechnung im Unterricht zu thematisieren (vgl. vom Hofe 2007). Den ersten Schritt der Zahlbereichserweiterung von \mathbb{N} nach \mathbb{Z} stellt dabei die Erweiterung des Zahlenstrahls zur Zahlengeraden dar. Diese Erweiterung erfolgt heute oft bereits in Jahrgangstufe 5 bzw. 6 getrennt von der weiteren unterrichtlichen Thematisierung negativer Zahlen. Für diese Erweiterung wird häufig aufgrund der vermeintlichen Vertrautheit negativer Zahlen aus dem Bereich der Temperaturmessung das Thermometer als Instruktionskontext genutzt. Im Sinne von *task contexts* sollen solche Kontexte den Auf- und Ausbau von Vorstellungen zu mathematischen Gegenständen fördern und somit als deren Verstehensgrundlage dienen (van den Heuvel-Panhuizen 2005). Sie stellen entsprechend der konzeptuellen Metaphertheorie (Lakoff & Johnson 1980) Quellbereiche metaphorischer Konzeptualisierung dar. Konzeptuelle Metaphern können jedoch aufgrund des Fokussierungseffekts einen mathematischen Gegenstand nur partiell erschließen. Dabei werden zwar einige Aspekte des zu konzeptualisierenden Gegenstandes beleuchten (*highlighting*), andere aber auch verborgen (*hiding*) (vgl. Lakoff & Johnson 1980, S. 10-13). Der Rückgriff auf einen Kontext führt in der Instruktion daher nicht notwendig zu normentsprechenden Vorstellungen. Oft stellen Kontexte eine neue und eigenständige Anforderung dar (vgl. z. B. Steinbring 1994, S. 190). Für eine Erweiterung des Zahlenstrahls zur Zahlengerade über den Kontext des Thermometers erscheint somit neben der Vertrautheit der Lernenden mit diesem Messinstrument für den Lehrenden ein Wissen um mögliche Fehlvorstellungen, die aus diesem Kontext in den mathematischen Zielbereich der negativen Zahlen übertragen werden können, von zentraler Bedeutung. Dabei können nach Piaget (1981, S. 20 f.) die in der Wissenschaftsgeschichte eingenommenen Positionen oft ersten Aufschluss über die möglichen Sichtweisen der Lernenden geben.

2. Negative Zahlen als Maßzahlen auf der Thermometerskala

Obwohl negative Zahlen im europäischen Raum heute bei meteorologischen Temperaturangaben eine Selbstverständlichkeit darstellen, kann kaum genau bestimmt werden, wann die gegenwärtig gebräuchliche Thermometerskala nach Celsius um negative Werte erweitert wurde.

Fludd (1638) stellt ein Luftthermometer mit einer 13-teiligen Skala vor, wobei sechs Einheiten über und sechs unter der zentralen Linie bei 1 liegen (Abb. 1). Diese Skalierung spiegelt die Auffassung wieder, Kälte (lat. *hyems*) und Wärme (lat. *æstas*) seien zwei gegeneinander wirkende Naturkräfte, die in einem Bereich, der sog. *sphæra æqualitatis* ausgeglichen, 'temperiert' seien. Entsprechend werden auch die ersten, in der Mitte des 17. Jh. in Italien aufkommenden Flüssigkeitsthermometer mit einer ähnlichen, wenn auch feineren Skalierung versehen (vgl. Grigull 1986). Rømer (1644-1710) versucht, für sein Thermometer mit dem Gefrierpunkt von Salzlake einen absoluten Nullpunkt zu bestimmen. Einen ähnlichen Versuch unternimmt 1708 auch Fahrenheit. Beckman (1997) nimmt an, dass sowohl Rømer als auch Fahrenheit mit der Definition eines absoluten Nullpunkts versuchen, negative Zahlen als Maßzahlen bei der Temperaturmessung zu vermeiden. Allerdings ist eher anzunehmen, dass beide mit ihren Skalen der

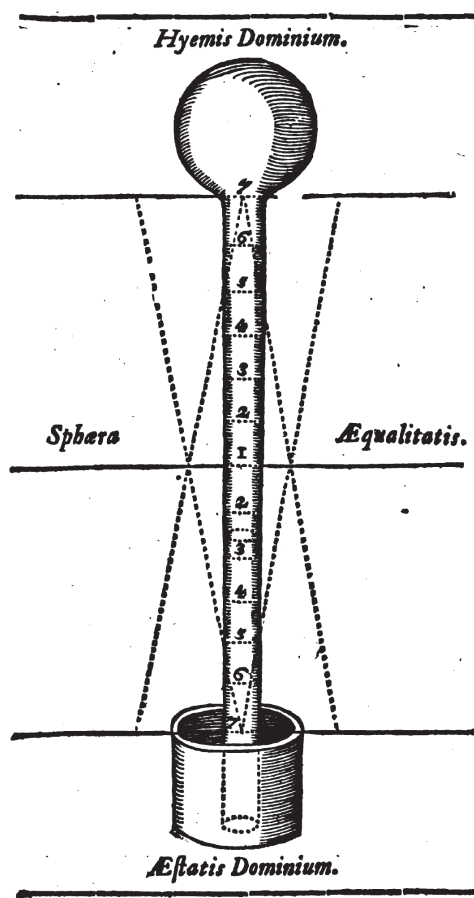


Abbildung 1: Thermoskop bei Fludd (1638, Sec. I, Lib. I, Cap. II-III)

veränderten Sichtweise Ausdruck verleihen wollen, wonach die Temperatur als *ungeteilte* Größe bestimmt durch die Menge an Wärmesubstanz (*phlogiston* bzw. *caloricum*) und nicht als in Wärme- und Kältekräft *geteilte* Größe gesehen wird. Celsius (1701-1744) vermeidet die Notwendigkeit einer geteilten Skala mit negativen Werten bei der meteorologischen Temperaturmessung, indem er auf seiner Skala die Siedetemperatur von Wasser als Nullpunkt und dessen Gefrierpunkt als 100° festlegt (vgl. Beckman 1997). Vermutlich ist der Celsius-Schüler Strömer (1707-1770) der erste, der – das invertierte Celsius-Thermometer (sog. *Celsius novum*) gebrauchend – ab 1750 bei seinen Temperaturaufzeichnungen Werte mit negativem Vorzeichen für Temperaturen unter dem Gefrierpunkt verwendet. Diese Notationsform scheint sich ab Mitte des 18. Jh. in Europa für Thermometer mit einem Wertebereich über und unter null zu verbreiten. Anders als wohl von Rømer, Fahrenheit und auch Celsius intendiert, tragen jedoch entsprechende Skalen im gewissen Sinne den Gedanken der opponierenden

(Sub-)Größen weiter, da die Null die Skala in einen Bereich warmer Temperaturen über null und kalter Temperaturen unter null teilt.

3. Vorstellungen zu negativen Zahlen im Kontext des Thermometers

Vorunterrichtliche Vorstellungen zu negativen Zahlen im Kontext des Thermometers waren neben entsprechenden Vorstellungen in weiteren Kontexten Gegenstand einer explorativen Untersuchung bei Grundschulkindern der Klassen 3 und 4. Dazu wurden die Lernenden in einer schriftlichen Befragung aufgefordert, ein Thermometer an einem kalten Wintertag zu zeichnen. Mit ausgewählten Lernenden wurden im Anschluss problemzentrierte Interviews zur näheren Erkundung der Schülerbearbeitungen aus der schriftlichen Befragung geführt.

Die Ergebnisse der schriftlichen Befragung zeigen, dass ungefähr zwei Drittel der 291 befragten Lernenden mit dem Thermometer negative Zahlzeichen verbinden. Dabei lassen die Thermometerzeichnungen zum Teil aber auch Fehlvorstellungen bezüglich Wärme und Thermometrie vermuten. So zeichnen einige Lernende Thermometer, die ausschließlich der Messung kalter Temperaturen dienen. Solche Kryometer können Skalen mit ausschließlich negativen Werten besitzen (Abb. 2). Im Gegensatz dazu zeichnet Yasmina (Klasse 4) ein Thermometer mit ausschließlich positiven Werten, erklärt im Interview aber, dass bei ihrem Thermometer die Messflüssigkeit bei zunehmender Kälte steigen würde. Für die Zeichner von

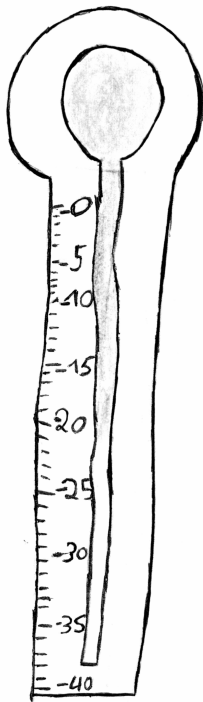


Abbildung 2: Robins Kryometer (Nachzeichnung)

Kryometern scheinen Wärme und Kälte zwei voneinander getrennte Kräfte oder Substanzen zu sein. Erickson (1979) stellt fest, dass viele Lernende im Alter von 6 bis 13 eine entsprechende Vorstellung besitzen, welche an die bis Ende des 17. Jh. in der Thermometrie vertretene Position erinnert. Wie sich eine solche Fehlvorstellung bezüglich der Thermometrie auf das Verständnis von negativen Zahlen auswirken kann, zeigt Fabian (Klasse 3). Auch er versteht Kälte und Wärme als zwei unterschiedliche Größen: „Weil [...] Wärme übersteigt halt die Kälte.“ Die Skala des von ihm gezeichneten Thermometers zeigt keine negativen Zahlen, wohl aber wie bei Fluid Werten über und unter null. Fabian bezieht sich bei Aufgaben an der Zahlengeraden explizit auf das Thermometer: „Da hab ich's so ähnlich wie beim Thermometer gemacht: nach der Null mit zehn weiterge-

macht...“. Das Thermometer bietet ihm folglich Orientierung im negativen Bereich der Zahlengeraden. Fabian scheint allerdings Fehlvorstellungen aus dem Bereich der Thermometrie in den Bereich der negativen Zahlen zu übertragen, was in diesem zu der von Malle (1989) beschriebenen Vorstellung einer spiegelbildlichen Anordnung der ganzen Zahlen führt. So nimmt Fabian bezüglich der Ordnungsrelation zwischen zwei negativen Zahlen an, dass die betraglich größere Zahl auch die numerisch größere Zahl sei. Dies entspricht der Vorstellung, dass der betraglich größere Wert die größere Kälte angibt.

Es zeigt sich somit, dass über den Kontext des Thermometers Fehlvorstellungen bezüglich Thermometrie auf die Vorstellung zu den negativen Zahlen übertragen werden können. Soll die Thermometrie als Kontext zur Thematisierung negativer Zahlen dienen, sind auch die Schülervorstellungen zu diesem Kontext zu berücksichtigen. Außerdem ist vor dem Hintergrund des oben beschriebenen Fokussierungseffekts zu erwägen, weitere Kontexte bei der Erweiterung des Zahlenstrahls zur Zahlengeraden zu nutzen, um differenzierte Perspektiven auf den erweiterten Zahlbereich zu eröffnen.

Literatur

- Beckman, O. (1997). Anders Celsius and the fixed points of the Celsius scale. *European Journal of Physics*, 18(3), 169-175.
- Erickson, G. L. (1979). Children's conceptions of heat and temperature. *Science education*, 63(2), 221-230.
- Fludd, R. (1638). *Philosophia moysaica*. Goudae: Petrus Rammazenus.
- Grigull, U. (1986). Fahrenheit und die Thermometrie. Zum 300. Geburtstag von D. G. Fahrenheit. *Naturwissenschaftliche Rundschau*, 39(5), 201-208.
- Lakoff, G. & Johnson, M. (1980). *Metaphors we live by*. Chicago: University of Chicago Press.
- Malle, G. (1989). Die Entstehung negativer Zahlen als eigene Denkgegenstände. *mathematik lehren*, H. 35, 14-17.
- Piaget, J. (1981). *Einführung in die genetische Erkenntnistheorie* (2. Aufl.). Frankfurt a. M.: Suhrkamp.
- Steinbring, H. (1994). Symbole, Referenzkontexte und die Konstruktion mathematischer Bedeutung - am Beispiel der negativen Zahlen im Unterricht. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 15(3/4), 277-309.
- Van den Heuvel-Panhuizen, M. (2005). The role of contexts in assessment problems in mathematics. *For the learning of mathematics*, 25(2), 2-23.
- Vom Hofe, R. (2007). Varianten im Unterrichtsgang. Von den natürlichen zu den rationalen Zahlen. *mathematik lehren*, H. 142, 12-13.