

Kathrin SCHLARMANN, Oldenburg

Charakterisierung von Denkweisen in der Linearen Algebra

In diesem Beitrag wird ein Einblick in empirisch fundierte Denkweisen von Mathematikstudierenden gegeben, die sich beim Bearbeiten von Aufgaben aus dem Themengebiet der Linearen Algebra zeigten. Die Aufgabenbearbeitungen durch die Studierenden erfolgten im Rahmen qualitativer Einzelinterviews.

Motivation und Einbettung in bisherige Forschung

Es besteht Handlungsbedarf mathematische Anfängervorlesungen effektiver zu gestalten, denn hohe Studienabbruchzahlen zu Beginn des Mathematikstudiums (Heublein et al. 2012) und niedrige Erfolgsquoten (Reichersdorfer et al. 2014) sind belegt. An den mathematischen Anfängervorlesungen nehmen neben Mathematikstudierenden im Fach-Bachelor Studiengang auch Studierende aus Zwei-Fächer-Bachelor Studiengängen, nämlich des Lehramts an Gymnasien und des Lehramts an berufsbildenden Schulen teil. Für angehende Mathematiklehrerinnen und -lehrer sind Beweglichkeit bezüglich mathematischer Inhalte und geistige Fähigkeiten, zum Beispiel strukturieren, logisches Denken, analytisches Denken, unverzichtbar. Viele Lehramtsstudierende (und Fach-Bachelor-Studierende ebenfalls) bleiben allerdings auf der Ebene der bloßen Ausführung von Rechenprozeduren stehen. Sie verstehen die wichtigen konzeptuellen Ideen, die den Prozeduren zu Grunde liegen, nicht. Bedenklich ist, wie zukünftige Lehrerinnen und Lehrer, die sich selbst beim Lernen von Mathematik stark auf das Beherrschen von Kalkülen konzentrieren, Mathematik in der Schule unterrichten werden. Vor dem Hintergrund, dass dem schulischen Mathematikunterricht eine essentielle Rolle für die Darstellung der Mathematik in der Gesellschaft zukommt, scheint eine Weiterentwicklung mathematischer Vorlesungen dringlich.

Tatsächlich haben diverse Wissenschaftlerinnen und Wissenschaftler bereits Initiative ergriffen und Schwierigkeiten von Studierenden mit der akademischen Mathematik analysiert (vgl. u.a. Fischer 2006, Maracci 2008, Britton & Henderson 2009, Stewart & Thomas 2010) und alternative Lehrkonzepte erstellt und ausprobiert (vgl. u.a. Stewart & Thomas 2010, Bausch et al. 2014). Aus den Ergebnissen empirischer Studien zum Lehren und Lernen der Linearen Algebra werden folgende Schlüsse gezogen: „There is still much work to be done in attempting to understand the precise nature of students‘ conceptual difficulties in a linear algebra course.“ (Britton & Henderson 2009, S. 972). Studierende zeigten Potential zur

sinnhaften Verarbeitung von mathematischen Begriffen (Fischer 2006), aber dennoch liegen Schwierigkeiten beim Verstehen auf elementarem Niveau vor (Stewart & Thomas 2010, Maracci 2008). Stewart & Thomas (2010) machen insbesondere darauf aufmerksam, dass Schwierigkeiten beim Vernetzen von Begriffen auftreten. Diese Tatsachen wecken das Interesse, genauer zu betrachten, welche Charakteristika Denkweisen von Studierenden bei der Bearbeitung von (für die Studierenden) herausfordernden Aufgaben mit Fokus auf begriffliche Vernetzungen aufweisen.

Untersuchungsdesign und Auswertungsmethodik

Im Rahmen einer qualitativen Fallstudie wurden klinische halbstandardisierte Einzelinterviews mit 15 Lehramtsstudierenden der Linearen Algebra durchgeführt. Die Probandinnen und Probanden bearbeiteten drei unterschiedliche Aufgaben zum Thema Basen von Vektorräumen. Die Bearbeitung der Aufgaben regte zum konzeptuellen Denken an und erforderten keine Standardlösungswege. Verschiedene Zugänge waren möglich. Die Interviews dauerten zwischen 40 und 90 Minuten und wurden videografiert. Die Flexibilität in Bezug auf das Verhalten des Interviewers ermöglichte das Aufdecken neuer Phänomene und generierte reichhaltiges Datenmaterial. Die Auswertung mittels sequentieller Feinanalyse, Fallvergleich und Gruppierung führte zu differenzierten Beschreibungen und Strukturierungen von Denkweisen. Auf Details zur Auswertung wird in diesem Beitrag nicht näher eingegangen.

Charakterisierung ausgewählter Denkweisen

Bei der Bearbeitung der Aufgaben zeigten die Probandinnen und Probanden unterschiedliche Denkweisen. Drei ausgewählte und empirisch belegte Denkweisen sollen im Rahmen dieses Beitrags skizziert werden. Über einzelne Schwierigkeiten hinaus, wird das Denken und das Verstehen seitens der Probandinnen und Probanden im Rahmen eines Gedankengangs möglichst ganzheitlich betrachtet.

Denkweise A: Charakteristisch für diese Denkweise ist das Herausfiltern eines Begriffs oder eines genannten Aspekts in der Aufgabenstellung, der als Indikator fungiert und eine Rechenprozedur aktiviert. Probandinnen und Probanden, die diese Denkweise zeigen, können die jeweilige Prozedur, die zwar nicht zielführend ist, durchaus sehr souverän ausführen, stoßen aber bei der Begründung, inwiefern das gewählte Vorgehen zur Lösung beiträgt, an ihre Grenzen. Typisch ist, dass dem vermeintlichen Indikator eine dominierende Bedeutung zugeteilt wird und weitere, mit der Rechenprozedur in Konflikt stehende Informationen in der Aufgabenstellung nicht erkannt

werden oder bewusst wenig Beachtung erhalten. Eine Reflexion über bisherige Lösungsansätze, aus der nützliche Informationen für die Lösung abgeleitet werden könnten, ereignet sich nicht. Insgesamt treten im Rahmen der Denkweise A grundsätzlich Schwierigkeiten mit dem Aufbau von mathematischen Begriffen auf. Begriffliche Vernetzungen werden kaum aktiviert. In einer Nicht-Standardsituation scheinen keine alternativen inhaltlichen Zugänge möglich zu sein.

Denkweise B: Das Charakteristische für diese Denkweise sind grundsätzlich geeignete Denkhandlungen, wie das Beobachten und Vorausdenken von Wirkungen, das Erkennen von und Reagieren auf Unstimmigkeiten oder das Beobachten der Wirkung von vorgenommenen Veränderungen. Allerdings sind mathematische Begriffe nicht adäquat gebildet. Es wird von der Probandin oder dem Probanden erkannt, dass Unstimmigkeiten im individuell aktivierten Begriffsnetz existieren. Weiterhin besteht ein Bedürfnis nach Stimmigkeit. Das Identifizieren der Ursache einer Unstimmigkeit bereitet jedoch größte Mühe oder gelingt nicht. Probandinnen und Probanden, welche die Denkweise B zeigen, kämpfen damit aus mehreren Eigenschaften eines Begriffs oder Folgerungen aus dem Begriff den eigentlichen Kern des Begriffs selbst auszumachen. Dies führt dazu, dass das Umstrukturieren von mathematischen Begriffen in ein stimmiges Begriffsnetz eine Hürde darstellt.

Denkweise C: Charakteristisch für diese Denkweise ist ein begriffliches Denken, wobei mehrere Teilbegriffe, die einen komplexeren Begriff (zum Beispiel Basis) definieren, isoliert voneinander gedacht werden. Die Teilbegriffe sind adäquat gebildet, sie liegen jedoch als in sich geschlossene Funktionseinheiten oder einzelne Module vor. Führt ein Lösungsansatz aus Sicht der Probandin oder des Probanden nicht zum Ziel, so sind alternative Zugänge (zum Beispiel über weitere Teilbegriffe wie lineare Unabhängigkeit oder Erzeugendensystem beim Basisbegriff) vorhanden. Die einzelnen Lösungsansätze stehen bei dieser modularen Denkweise für sich. Zuvor aktivierte Lösungsansätze werden ausgeblendet. Bezüglich der Begriffsbildung lässt sich sagen, dass Vernetzungen höherer Ordnung, nämlich unter den Modulen, Hürden darstellen, während Teilaspekte innerhalb eines Moduls gut vernetzt sind.

Fazit

Insgesamt lässt sich sagen, dass die Denkweisen der Probandinnen und Probanden sehr vielfältig und unterschiedlich sind und das Erschließen und Vernetzen von Begriffen bei der Bearbeitung von Aufgaben keineswegs ein leichtes Unterfangen darstellt. Es wurde ein Einblick in Denkweisen gege-

ben, die sich bei Studierenden bei der Bearbeitung von Aufgaben zeigten. Die Untersuchungsergebnisse zeigen, dass Schwierigkeiten von Probandinnen und Probanden mit einer Eingeschränktheit ihrer Denkweisen einhergehen. Da in der zugrundeliegenden Untersuchung individuelle Gedankengänge im Vordergrund stehen, lassen sich individuelle Fördermaßnahmen ableiten (siehe dazu Schlarmann 2014).

Literatur

- Bausch, I., Biehler, R., Bruder, R., Fischer, P., Hochmuth, R., Koepf, W., Schreiber, S. & Wassong, T. (Hrsg.) (2014). *Mathematische Vor- und Brückenkurse: Konzepte, Probleme und Perspektiven*. Wiesbaden: Springer.
- Britton, S. & Henderson, J. (2009). Linear algebra revisited: An attempt to understand students' conceptual difficulties. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 40 (7), 963-974.
- Fischer, A. (2006). *Vorstellungen zur linearen Algebra: Konstruktionsprozesse und – ergebnisse von Studierenden*. Dissertation, Universität Dortmund. Heruntergeladen von <https://eldorado.tu-dortmund.de/handle/2003/22202> am 02.03.2015.
- Heublein, U., Richter, J., Schmelzer, R. & Sommer, D. (2012). Die Entwicklung der Schwund- und Studienabbruchquoten an den deutschen Hochschulen. Statistische Berechnung auf Basis des Absolventenjahrgangs 2010. Heruntergeladen von http://www.dzhw.eu/pdf/pub_fh/fh-201203.pdf am 02.03.2015.
- Maracci, M. (2008). Combining different theoretical perspectives for analyzing students' difficulties in vector space theory. *ZDM – The International Journal on Mathematics Education*, 40, 265-276.
- Reichersdorfer, E., Ufer, S., Lindmeier, A. & Reiss, K. (2014). Der Übergang von der Schule zur Universität: Theoretische Fundierung und praktische Umsetzung einer Unterstützungsmaßnahme am Beginn des Mathematikstudiums. In I. Bausch et al. (Hrsg.), *Mathematische Vor- und Brückenkurse: Konzepte, Probleme und Perspektiven* (S. 37-53). Wiesbaden: Springer.
- Schlarmann, K. (2014). Workshop zur Förderung der Begriffsbildung in der Linearen Algebra. In R. Biehler et al. (Hrsg.), *Mathematik im Übergang von Schule zur Hochschule und im ersten Studienjahr*. Wiesbaden: Springer.
- Stewart, S. & Thomas, M. O. J. (2010). Student learning of basis, span and linear independence in linear algebra. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 41 (2), 173-188.