Oliver SCHMITT, Darmstadt

Reflexionswissen aus tätigkeitstheoretischer Perspektive am Beispiel des mathematischen Argumentierens

In den Bildungsstandards wird unter anderem das Bewerten von Argumentationen als Anforderung an Schülerinnen und Schüler (SuS) formuliert (vgl. KMK, 2012, S. 15). Um dieser Anforderung begegnen zu können ist Metawissen über die Charakterisierung fachspezifischer Argumente, sowie zu deren Struktur und Funktion erforderlich. Insbesondere können sonst die Unterschiede, die sich in vielfältigen argumentationsbezogenen Operatoren wie Diskutieren, Begründen oder Beweisen zeigen, von den SuS kaum nachvollzogen werden. Dieser Beitrag befasst sich mit dem Verhältnis von Metawissen zu Reflexionsprozessen, der Frage wie dieses im Unterricht thematisiert werden kann und was es in Bezug auf die Analyse, Bewertung und Charakterisierung von mathematischen Argumenten inhaltlich umfassen kann. Im Fokus des Beitrags liegt dabei die Förderung der genannten Reflexionsprozesse. Die Verbesserungen der eigenen Argumentionen der SuS sind im Rahmen des Beitrags nachgeordnet.

Verhältnis von Metawissen zu Reflexionsprozessen

Metawissen über die Struktur und Funktion eines Arguments steht in einer dialektischen Beziehung zu Reflexionsprozessen wie dem Analysieren und Bewerten, da es einerseits bei der Analyse selbst gewonnen wird, andererseits aber auch für diese schon vorausgesetzt wird, da ohne Wissen über dessen Struktur die Analyse eines Argumentes kaum möglich ist.

Diese dialektische Sichtweise lässt sich mit Begriffen der Tätigkeitstheorie lerntheoretisch beschreiben. Eine Lernhandlung wird dort strukturell in einen Orientierungsteil und einen Ausführungsteil gegliedert. In Bezug auf eine Anforderung wird im Orientierungsteil eine Orientierungsgrundlage erarbeitet, auf deren Basis im Ausführungsteil eine Handlung vorgenommen wird. Zur Erarbeitung der Orientierungsgrundlage sind einerseits bereits Kenntnisse notwendig, andererseits werden Kenntnisse in Lernhandlungen aber auch angeeignet. Es können dabei die vier Orientierungstypen Probier-, Muster-, Feld- und Problemorientierung unterschieden werden (vgl. Schmitt, 2013). In Bezug auf die Anforderung, ein Argument zu analysieren und zu bewerten, wäre die zugehörige Handlung bei einer Probierorientierung auf Oberflächenmerkmale wie den Einsatz mathematischer Symbole bezogen, bei einer Musterorientierung würde eine bekannte Analyse und Bewertung eines Arguments als Beispiel dienen und der Versuch unternommen diese zu übertragen. Bei einer Feldorientierung würden all-

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

gemeine Kriterien der Struktur und Funktion eines Arguments herangezogen. Bei einer Problemorientierung würde darüber hinaus bei entsprechend kritischen Argumenten die Abhängigkeit der Bedeutung der Bewertungskriterien vom jeweiligen historischen und lebensweltlichen Kontext vor dem Hintergrund individueller Einschätzungen in den Blick genommen.

Die Lehrstrategie des Aufsteigens vom Abstrakten zum Konkreten nach Dawydow (1977) kann dabei helfen eine möglichst weittragende Orientierung schon früh im Lernprozess anzuregen. Bereits bei der Lernzielbildung soll ein möglichst breiter Horizont eröffnet werden. Als erstes Zwischenergebnis im Lernprozess steht dann das sogenannte Ausgangsabstraktum, das zentrale Merkmale des Lerngegenstands abbildet, in Beziehung setzt, verankert und eine Rahmung für den weiteren Unterrichtsverlauf bietet. Dabei dient das Ausgangsabstraktum als Hilfsmittel „der Analyse des Konkreten unter dem Aspekt des Abstrakten“ (s. Lompscher, 1996, S. 6).

Im Zentrum des Vortrages stand die Vorstellung eines solchen Ausgangsabstraktums in Form eines Informationsblattes für die SuS (abrufbar unter: http://www.oschmitt.net/uni/informationsblatt_argumentieren.pdf), das eine Darstellung von Strukturmerkmalen, Funktionen und Charakteristika mathematischer Argumente beinhaltet. Zusätzlich sind darauf Fragen zu einzelnen Strukturmerkmalen sowie Beispiele formaler und anschaulicher mathematischer Argumente und eines Alltagsarguments angegeben, um den SuS auch Zugänge über eine Musterorientierung zu ermöglichen. In den beiden nächsten Abschnitten wird das auf dem Informationsblatt dargestellte Metawissen zum Argumentieren und der mögliche Einsatz des Blattes in einer Unterrichtseinheit zu den komplexen Zahlen vorgestellt.

Metawissen zum Argumentieren

Die Bewertung von Argumenten erfordert eine Bewusstmachung von deren Funktion. Die Erwartungen an Argumente, die in erster Linie erklärende Funktion haben, etwa in einem Überblicksvortrag, sind andere als jene an Argumente, die besonders Verifizierung und Systematisierung, etwa in einem Journalartikel, anstreben. Auf dem Informationsblatt sind die verschiedenen Funktionen abgebildet, die de Villiers (1990) in Bezug auf mathematische Argumente beschreibt. Den auf dem Blatt angegebenen Beispielargumenten werden zudem die jeweils vorwiegenden Funktionen zugeordnet.

Als Metawissen über die Struktur von (mathematischen) Argumenten bietet sich für eine solche Übersicht das Schema von Toulmin (1984) an, da dessen breiter Argumentbegriff geeignet ist, um damit nicht nur formale deduktive Schlüsse abzubilden, sondern auch anschauliche Schlüsse bis hin zu Alltagsargumenten. Damit ist eine Differenzierung unterschiedlicher Schlüsse in der Mathematik im Sinne des demonstrativen und plausiblen Schließens Polyas (1969) aber auch eine Übertragung auf Argumente außerhalb der Mathematik möglich. Dadurch können einseitige Vorstellungen über mathematische Argumente vermieden werden. Das Schema eignet sich auch um epistemologische Besonderheiten mathematischer Argumente sichtbar zu machen. Jahnke unterscheidet offene Aussagen im Alltag mit unklarem Gültigkeitsbereich und möglichen Ausnahmen von geschlossenen Aussagen in der Mathematik, für die der Gültigkeitsbereich genau spezifiziert ist. Dieser Unterschied ist im Toulmin-Schema direkt sichtbar (vgl. Jahnke, 2008). Darüber hinaus ist auch die Einbettung von Argumenten in zugrundeliegende Theoriegebäude im Toulmin-Schema sichtbar. Dies erleichtert die Darstellung des hypothetischen Arbeitens in der Mathematik, das zur Charakterisierung mathematischen Argumentierens beiträgt. Erst die argumentative Erkundung der Konsequenzen einer Hypothese führt zu einer akzeptierten Formulierung einer mathematischen Theorie.

Umsetzung anhand des Beispiels komplexer Zahlen

Als fachinhaltlicher Rahmen für das Informationsblatt wurde das Thema der komplexen Zahlen gewählt. Die rein formale Erweiterung der reellen Zahlen durch das Symbol i mit $i^2 = -1$ ist nur dann zweckmäßig, wenn sie eine brauchbare Erweiterung des Zahlensystems darstellt (vgl. Courant & Robbins, 2012, S. 72), was sich erst durch Hypothesen und Argumente erweisen kann. Mit diesem Gedanken können die Lernenden die Rechengesetze der komplexen Zahlen erkunden und in diesem überschaubaren Rahmen Wissen über die Struktur und Funktion mathematischer Argumente bis hin zu charakterisierenden epistemologischen Fragen des hypothetischen Arbeitens und der Existenz mathematischer Objekte kennenlernen.

Zur anfänglichen Lernzielbildung eignet sich das bekannte Cantorzitat: „Das Wesen der Mathematik liegt in ihrer Freiheit.“ Gemeinsam mit den SuS können verschiedene Zugänge diskutiert werden, um das Spannungsfeld zwischen der Einbettung in ein bereits vorhandenes Theoriegebäude und der Freiheit der Formulierung aller denkbaren Hypothesen zu eröffnen (vgl. Décaillot, 2011, S. 92). Um thematisch den Bezug zu den komplexen Zahlen herzustellen wird dies mit einer Wiederholung bisheriger Zahlbereichserweiterungen verbunden, bei denen einerseits die Freiheit, neue Denkobjekte zu konstruieren genutzt wurde und andererseits eine Einbettung in vorhandene Theorien durch das Permanenzprinzip gegeben war. Auf dieser Grundlage kann nun ein Ausgangsabstraktum erarbeitet werden, das die im Abschnitt Metawissen zum Argumentieren angeführten Wissenselemente beinhaltet. Dabei können zunächst einmal von den reellen Zahlen bekannte Rechenregeln gesammelt und Hypothesen über die Definitionen der Operationen mit komplexen Zahlen gebildet werden, um diese Rechenregeln, entsprechend dem Permanenzprinzip, möglichst gut erhalten zu können. Die Beispiele für eine formal-deduktive und eine anschauliche Argumentation auf dem Informationsblatt beziehen sich inhaltlich auf das Kommutativgesetz der Addition von komplexen Zahlen. Diese Beispiele können an dieser Stelle besprochen werden, um das Informationsblatt bei der ersten argumentativen Erprobung der Hypothesen einzuführen.

Im weiteren Unterrichtsverlauf können weitere Eigenschaften der komplexen Zahlen erkundet werden, von anderen Rechenregeln bis hin zu der Frage nach einer sinnvollen Ordnung. Die SuS können Vorträge oder kurze Artikel zu einzelnen Fragestellungen ausarbeiten und anschließend jeweils die dort verwendeten Argumente auf der Basis des Informationsblattes analysieren und bewerten. Die epistemologische Fragestellung der Existenz mathematischer Objekte könnte mit der Frage, ob und inwiefern eine sinnvolle Definition von $h = 1/0$ möglich ist, aufgegriffen werden. Vergleiche mit außermathematischen Argumenten, insbesondere auch fächerverbindend mit dem Ethikunterricht, in dem das Toulmin-Schema zum Teil Unterrichtsinhalt ist (vgl. SenBJW, 2012, S. 21), können Charakteristika mathematischen Argumentierens noch deutlicher werden lassen.

Literatur

Courant, R. & Robbins, H. (2010). *Was ist Mathematik?*. Berlin, Heidelberg: Springer.

Dawydow, W. (1977). *Arten der Verallgemeinerung im Unterricht*. Berlin: Volk und Wissen.

De Villiers, M. (1990). The role and function of proof in mathematics. *Pythagoras*, 24, 17–24.

Décaillot, A.-M. (2011). *Cantor und die Franzosen*. Berlin, Heidelberg: Springer.

Jahnke, H.-N.(2008). Theorems that admit exceptions, including a remark on Toulmin. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 40, 363–371.

KMK [Kultusministerkonferenz] (2012). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife. Beschluss vom 18.10.2012*. (http://www.kmk.org/)

Lompscher, J. (1996). Aufsteigen vom Abstrakten zum Konkreten - Lernen und Lehren in Zonen der nächsten Entwicklung. *LLF-Berichte*, 16, 98–118.

Polya, G. (1969). *Mathematik und plausibles Schließen*. Basel: Birkhäuser Verlag.

Schmitt, O. (2013). Tätigkeitstheoretischer Zugang zu Grundwissen und Grundkönnen. In G. Greefrath, F. Käpnick & M. Stein (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2013* (S. 894–897). Münster: WTM.

SenBJW [Senatsverwaltung für Bildung, Jugend und Wissenschaft] (2012). *Rahmenlehrplan für die Sekundarstufe I*, Integrierte Sekundarschule und Gymnasium, Ethik.

Toulmin, S., Rieke, R. & Janik, A. (1984). *An Introduction to reasoning*. New York: Macmillan Publishing Company.