

Angela SCHMITZ, Freiburg/Kassel, Andreas EICHLER, Kassel

Überzeugungen von Lehrkräften zum Visualisierungs-Einsatz im Algebra-Unterricht der Sekundarstufe

Dieser Beitrag präsentiert Ergebnisse einer qualitativen Studie zur Frage, welche Ziele Lehrkräfte mit dem Einsatz von Visualisierung im Algebra-Unterricht verbinden, basierend auf Daten zu Termumformungen und Gleichungslösen. Die Ziele werden anhand des Konstrukts Beliefs entwickelt.

Ausgangslage und theoretischer Hintergrund

Visualisierung spielt in der Mathematik eine wichtige Rolle, sowohl als Tätigkeit und als auch als deren Ergebnis. Sie kann mental oder extern sein, und sie kann als auf Ziele gerichtet verstanden werden (Arcavi, 2003, S. 217), u.a. auf das Entwickeln von Ideen und auf das Verbessern von Verständnis. In der Literatur ist die Bedeutung von Visualisierung für das Lehren und Lernen von Mathematik anerkannt (z.B. Presmeg, 2006).

Es gibt Anzeichen, dass Visualisierer unter den Lehrenden unterrepräsentiert sind (Presmeg, 1986). Speziell im Bereich der Algebra zeigen Stylianou & Silver (2004) andererseits, dass Lehrkräfte visuelle Repräsentationen für eine wichtige Strategie halten. Sie nutzen sie jedoch unterschiedlich. Weiterhin zeigen Lehrkräfte, die visuelle Beweise schätzen, im Detail sehr verschiedene Sichtweisen (Biza et. al., 2009).

Da weitgehend unbekannt ist, wie Lehrkräfte im Detail über den Einsatz von Visualisierung denken, soll dieser Frage mit Hilfe des Konstrukts der Beliefs (Philipp, 2007, S. 259) nachgegangen werden.

Forschungsfragen

In diesem Beitrag werden folgende Fragen untersucht: (1) Welche Ziele verbinden Lehrkräfte mit dem Einsatz von Visualisierung in den Gebieten Termumformungen und Gleichungslösen? (2) Wie ist die Beziehung zwischen diesen empirisch entwickelten Zielen und den in der Literatur genannten Funktionen von Visualisierung?

Methode

Fünf Lehrkräfte verschiedener Schulformen wurden in intensiven halbstrukturierten Interviews zu ihrem Einsatz von Visualisierungen im Algebra-Unterricht der Sekundarstufe befragt. Die Erhebung ist Teil einer größeren Studie, in der die Überzeugungen von Lehrkräften zu Visualisierung in den Gebieten Bruchrechnung, Algebra, Funktionen und Analysis untersucht wurden. Die Fragen in den Interviews richteten sich u.a. auf das Vor-

gehen im Unterricht, auf Unterrichtsziele und auf übergreifende Bereiche wie das Bild von Mathematik. Die transkribierten Interviews wurden gemäß der Grounded Theory (Glaser & Strauss, 1967) ausgewertet.

Ergebnisse

Alle Lehrkräfte äußern sich im Bereich Gleichungslösen zur Gleichungswaage und zu Funktionsgraphen. Weiterhin erwähnen sie u.a. Skizzen zu Anwendungsaufgaben.

Im Bereich Termumformungen ist die Vielfalt der eingesetzten Visualisierungen, über deren Einsatz die Lehrkräfte sprechen, größer: Beim Ausmultiplizieren von Klammern werden einerseits Rechtecke, andererseits Bögen und Pfeile verwendet. Das Addieren von Termen wird mit Obst, Geld bzw. Bausteinen visualisiert. Einzelne Lehrkräfte berichten aus ihrem Unterricht über den Einsatz von Farben, Mustern, Rechenbäumen und Skizzen.

Zur ersten Forschungsfrage, warum die Lehrkräfte die genannten Visualisierungen einsetzen, wurden in den Transkripten offene Codes zu den Gründen entwickelt. Das Vorgehen soll zum Thema Distributivgesetz anhand einer Äußerung von Herrn A verdeutlicht werden:

„Das Ausmultiplizieren von Klammern, das visualisiere ich noch. [...] Und zwar mache ich das immer mit Flächeninhalten von Rechtecken. Und zwar ein Rechteck, was hier so unterteilt ist [...] (Anm.: Es folgen eine Zeichnung und eine Beschreibung, wie Herr A zeichnet.)] Und dann können die sehen ‚Aha, das Distributivgesetz.‘“

Dieses Zitat führte zur Kodierung „Herleiten“. Weitere Textstellen unterstützen diese Hypothese, z.B. beim Multiplizieren von zwei Klammern:

„Dasselbe nachher, wenn man Klammern ausmultipliziert, das könnte man natürlich jetzt auch herleiten. [...] Also. Ich mache das mit einer Zeichnung.“

Andere Gründe waren u.a. „Eine Regel begründen“, „Inhalten einen Sinn geben“, „Inhalte vereinfachen“, „Eine Situation durch eine Skizze erfassen“. Gemeinsam ist ihnen, dass die Lehrkräfte Visualisierungen einsetzen, damit ihre Schülerinnen und Schüler „Zusammenhänge verstehen“.

Einer weiteren Gruppe von Codes wie „Vorgehen vormachen“, „Erinnern unterstützen“ und „Anker zum Weiterdenken“ ist gemeinsam, dass die Lehrkräfte Visualisierungen einsetzen, damit ihre Schülerinnen und Schüler sich „an ein Vorgehen oder an Zusammenhänge erinnern“.

Sowohl „Zusammenhänge verstehen“ als auch „an ein Vorgehen oder an Zusammenhänge erinnern“ können als kognitive Ziele verstanden werden.

In der Folge wurde untersucht, mit welcher Intensität die Lehrkräfte diese Ziele vertreten. Dazu wurden die empirisch entwickelten Gründe mit „häufig“, „gelegentlich“, „gar nicht“ gewichtet, basierend auf der Anzahl der Themen, bei denen eine Visualisierung eingesetzt wird, und auf der Intensität, mit der die Visualisierung beschrieben wird. Im Gebiet Termumformungen lassen sich die fünf Lehrkräfte so in drei Gruppen einteilen:

I. Visualisierungen dienen dazu, „Zusammenhänge zu verstehen“.

II. Visualisierungen dienen – wenn überhaupt – dazu, „an ein Vorgehen oder an Zusammenhänge zu erinnern“.

III. Visualisierungen dienen beiden Zielen.

Zur Klärung der zweiten Forschungsfrage wurden die empirisch ermittelten Gründe für den Visualisierungseinsatz mit in der Literatur (u.a. Arcavi, 2003; Duval, 2014) betonten Funktionen von Visualisierung (im Folgenden kursiv) verglichen:

Zum *Verstehen und Erklären* setzen drei der fünf Lehrkräfte Visualisierungen ein. Das *Beweisen* anhand von Visualisierungen lässt sich kaum vom Begründen und Herleiten trennen und wird nicht explizit von den Lehrkräften erwähnt. Vier Lehrkräfte setzen Visualisierungen ein, um *Rechnungen zu ermöglichen*, z.B. mit Pfeilen beim Distributivgesetz. Visualisierung zum *Entdecken von neuem* bzw. *Lösen von Problemen* kommt bei den untersuchten Lehrkräften nur vor, wenn man das Erstellen von Skizzen zu Anwendungsaufgaben darunter fasst.

Weiterhin nennen die Lehrkräfte das „Erinnern“. Diese Funktion wird in der mathematikdidaktischen Literatur allerdings kaum genannt.

Diskussion

Mit „*Zusammenhänge verstehen*“ und „*an ein Vorgehen oder an Zusammenhänge zu erinnern*“ wurden Ziele entwickelt, anhand derer man den Visualisierungseinsatz von Lehrkräften aus kognitiver Sicht charakterisieren könnte. Diese Aggregation lenkt den Blick allerdings weg von den detaillierteren Zielen der Lehrkräfte, die beispielsweise für den Vergleich mit der Literatur berücksichtigt wurden.

Der Vergleich empirischer Ziele und theoretischer Funktionen zeigt, dass Visualisierung als Strategie beim Problemlösen und zum Entdecken kaum vorkommt. „Erinnern“ scheint aus empirischer Sicht bedeutsamer als in der Literatur.

Methodisch ist anzumerken, dass die Gewichtung der Codes, mit der die Lehrkräfte in einer der drei Gruppen eingeordnet wurden, zurzeit auf dem

Gebiet Termumformungen basiert. Erste Ergebnisse, wie die Analyse von Zeichnungen zur Gleichungswaage, deuten jedoch darauf hin, dass die Gewichtung bei Ausweitung auf den Bereich Gleichungslösen stabil bleibt.

Ausblick

Erste Ergebnisse der übergeordneten Studie zeigen, dass die Überzeugungen in der Bruchrechnung mit denen in der Algebra konsistent sind (Schmitz & Eichler, 2015). Ein Vergleich mit den Bereichen Funktionen und Analysis liegt ebenfalls im Umfang der übergeordneten Studie.

Des Weiteren nennen die Lehrkräfte affektiv/motivationale Gründe für den Visualisierungseinsatz. Die Untersuchung dieser Gründe gehört auch zur Gesamtstudie.

Literatur

- Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 52 (3), 215–241.
- Biza, I., Nardi, E., & Theodossios, Z. (2009): Teacher beliefs and the didactic contract on visualization. *For the Learning of Mathematics*, 29 (3), 31–36.
- Duval, R. (2014). Commentary: Linking epistemology and semio-cognitive modeling in visualization. *ZDM*, 46 (1), 159–170. doi:10.1007/s11858-013-0565-8
- Glaser, B. G. & Strauss, A. L. (1967). *The discovery of grounded theory: Strategies for qualitative research*. Chicago: Aldine
- Philipp, R. A. (2007). Mathematics teachers' beliefs and affects. In F. K. Lester (Hrsg.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (S. 257–315). Charlotte (NC): Information Age Publishing.
- Presmeg, N. C. (1986). Visualisation in high school mathematics. *For the Learning of Mathematics*, 6 (3), 42–46.
- Presmeg, N. C. (2006). Research on visualization in learning and teaching mathematics: Emergence from Psychology. In A. Gutiérrez & P. Boero (Hrsg.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education. Past, present and future* (S. 205–235). Rotterdam: Sense Publishers.
- Schmitz, A. & Eichler, A. (2015). Teachers' Beliefs about the Role of Visualization in Classroom. In K. Krainer & N. Vondrová (Hrsg.), *Proceedings of CERME9*. Prague. (eingereicht)
- Stylianou, D. A. & Silver, E. A. (2004). The Role of Visual Representations in Advanced Mathematical Problem Solving: An Examination of Expert-Novice Similarities and Differences. *Mathematical Thinking and Learning*, 6 (4), 353–387.