Andreas SCHULZ, Freiburg

Wie lösen Viertklässler Rechenaufgaben zur Multiplikation und Division?

Die Entwicklung flexibler Rechenkompetenzen basiert auf der zunehmenden Vernetzung und wechselseitigen Integration prozeduralen und konzeptuellen Wissens. So benötigt das Lernen von informellen Prozeduren, wie bspw. unterschiedlicher halbschriftlicher Rechenwege, zumindest ein Teil-Verständnis. Andererseits ist Verständnis anfangs immer auf das Lösen lokaler Probleme und Prozeduren bezogen (Baroody 2003).

Lorenz (2006, 1998) beschreibt, dass für die langfristige Entwicklung flexibler Rechenkompetenzen ein tragfähiger Vorstellungsaufbau von Zahlen, arithmetischen Beziehungen und Operationen notwendig ist. Der daraus resultierende Zahlensinn erlaubt u.a. Abschätzungen über die Nähe von Zahlen zueinander, das Zerlegen und Zusammensetzen von Zahlen oder das Verstehen von Effekten von Operationen. Durch intensives Üben können die Stärken und Schwächen unterschiedlicher Rechenwege erfahren werden, um diese begründet auswählen und flexibel einsetzen zu können. Automatisierungsprozesse entlasten das Kurzzeitgedächtnis und begünstigen Fehlerfreiheit und Geschwindigkeit. Das Lösen fortschreitend komplexerer Aufgaben verlangt eine zunehmende Automatisierung der einzelnen Teilschritte, aus denen sie aufgebaut sind.

Die individuelle Entwicklung von Rechenstrategien ist nach Crowley, Shrager & Siegler (1997; vgl. Verschaffel et al. 2009) mit dem koordinierten Wechselspiel zwischen metakognitiven und assoziativen Lösungsprozessen verbunden. Assoziative Lösungsprozesse nutzen die Passung einer Aufgabenstellung zu bereits verfügbaren Lösungsschemata bzw. Rechenwegen, die sich bewährt haben. Eine solche Lösung kann schnell und automatisiert erfolgen. Falls für eine Aufgabenstellung noch kein bewährtes Lösungsschema zur Verfügung steht, ist ein metakognitiver Lösungsprozess nötig, der auf einer expliziten Analyse erkannter Aufgabenmerkmale unter Rückgriff auf eigene Problemlösestrategien basiert. Auf diesem Wege vertiefen und vergrößern Kinder ihr anwendbares, explizites Wissen über spezifische Aufgabenmerkmale und ihre eigenen, darauf bezogenen Fähigkeiten. Wenn möglich wird demnach assoziativ auf prototypische, automatisierte und schnell verfügbare Rechenwege zurückgegriffen, wenn nötig wird im metakognitiven, langsameren und analytischen Prozess eine Lösung erarbeitet.

Flexibles Rechnen wird in der Literatur aus zwei unterschiedlichen Perspektiven beleuchtet (Rathgeb-Schnierer 2011, 2010; Threlfall 2009): Das

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

Strategieauswahl-Modell nimmt an, dass sich Expertise im flexiblen Rechnen durch ein Abwägen unterschiedlicher möglicher Rechenstrategien gegeneinander auszeichnet und Expertise auf dem Verfügen über ein Strategierepertoire beruht. Das Emergenz-Modell andererseits betont, dass Rechenstrategien nicht im Sinne kompletter Lösungswege gewählt werden, sondern emergieren, indem flexible Rechner situationsbedingt auf spezifische Aufgabenmerkmale reagieren und auf strategische Mikro-Werkzeuge zum Vereinfachen und Verändern von Aufgaben zurückgreifen. Dazu gehören das Zerlegen und Zusammensetzen von Zahlen, gleich- und gegensinniges Verändern sowie das Nutzen von Hilfsaufgaben und Analogien. Expertise im flexiblen Rechnen beruht hier auf Zahl- und Operationswissen, dem Erkennen von Zahl- und Aufgabenmerkmalen sowie der Nutzung und Kombination strategischer Werkzeuge. Diese drei Kompetenzaspekte flexibler Rechenkompetenzen ergeben in der Zusammenfassung der dargelegten Theorien einen Hinweis auf drei idealtypische Phasen bzw. auf Bedingungen aus Kompetenzaspekten für die Anwendung von Rechenstrategien: Langfristig werden zunehmend komplexe Zusammenhänge erkannt und genutzt, neu erarbeitete Lösungswege werden als Schemata schrittweise automatisiert (vgl. Baroody 2003; Tab. 1):

Bedingungen/ Phase	*Lorenz (2006, 1998)*	*Crowley, Shrager & Siegler (1997)*	*Threlfall (2009), Rathgeb-Schnierer (2011, 2010)*
(Zahl- &) Operationsverständnis	Vorstellungsaufbau		
Lokale Zusammenhänge: Zahl und Aufgabenbeziehungen (er)kennen und nutzen	Entwicklung von Zahlensinn, intensives Üben als Grundlage für begründetes Entscheiden	Metakognitives System: bewusst, langsam	Emergenz-Modell: Erkennen und Nutzen von Aufgabenmerkmalen und strategischen Mikrowerkzeugen
Komplexe Zusammenhänge: Rechenwege (er)kennen und nutzen	Automatisierungsprozesse	Assoziatives System: automatisiert, schnell	Strategieauswahl-Modell: Strategierepertoire aus kompletten Rechenwegen

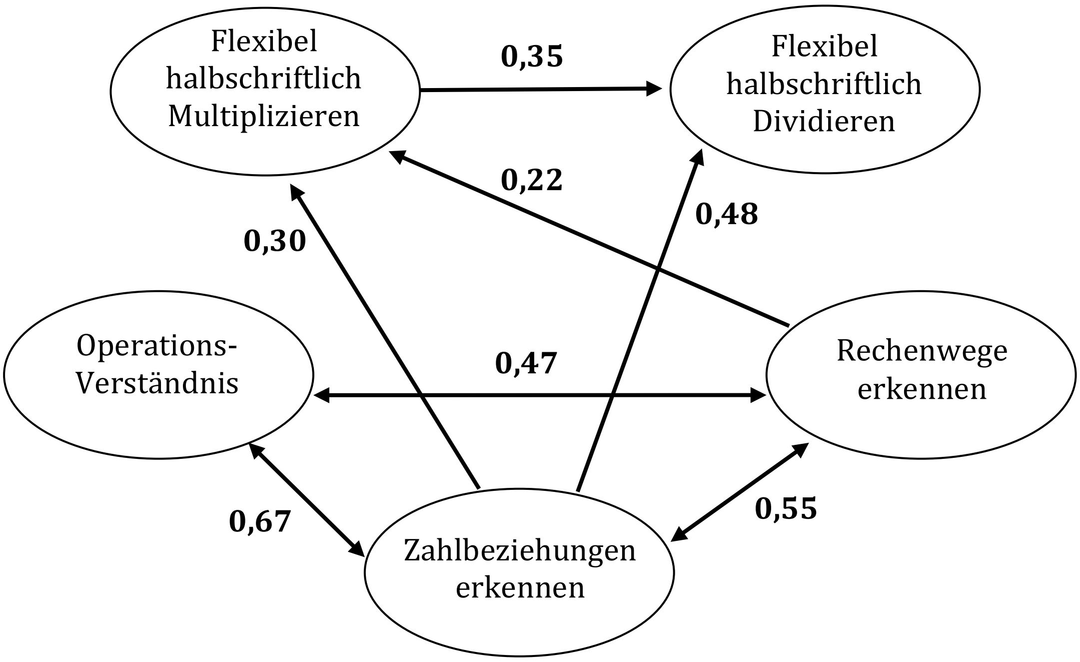
Der Beitrag dieser drei Kompetenzaspekte zum flexiblen Rechnen wurde am Beispiel der halbschriftlichen Multiplikation und Division in 13 vierten Klassen aus Süddeutschland untersucht (n = 221). „Operationsverständnis“

wurde mittels vier Textaufgaben erfasst (Bsp.: Aisa hat 56 €. Sabine hat 14€ weniger als Aisa. Sabine hat doppelt so viel Geld wie Paula. Wie viel € hat Paula?). Das „Erkennen von Zahl- und Aufgabenbeziehungen“ wurde über 4 Aufgaben operationalisiert (Zahlfolgen erkennen und fortsetzen, Zahlenpaare zu gesuchtem Produkt bzw. Quotient erkennen, Aufgabenmuster erkennen und fortsetzen). In 6 Multiple-Choice-Aufgaben sollten jeweils vier „Rechenwege erkannt und beurteilt“ werden (Bsp.: 18·22 kann man so rechnen: 10·20 + 8·2 / 10·20 + 10·2 + 8·20 + 8·2 / 9·44 / 20·20). In je zwei Aufgaben zur „flexiblen Multiplikation“ (9·21, 14·15) und „flexiblen Division“ (294:6, 360:40) wurde bewertet, ob bis zu drei korrekte und verschiedene Lösungswege angegeben werden konnten (Tab. 2):

Ohne (mit) Bewertung schriftlichen Rechnens	*Keine Lösung*	*Ein korrekter Rechenweg*	*Zwei korrekte Rechenwege*	*Drei korrekte Rechenwege*
9·21	75 (29)	113 (84)	28 (87)	5 (21)
14·15	135 (87)	62 (77)	22 (41)	2 (16)
294:6	177 (88)	39 (108)	5 (21)	0 (4)
360:40	167 (138)	44 (70)	10 (12)	0 (1)

In der Multiplikation dominierten die schriftlichen Algorithmen (232 von 528 insgesamt erfassten korrekten Lösungen), gefolgt von den halbschriftlichen Rechenwegen stellenweise (187), Malkreuz (17), schrittweise (32), Nachbaraufgabe (Ergebniskorrektur mit Subtraktion: 31) sukzessive Addition (22), gegensinniges Verändern (2) oder Kopfrechnen (5). Auch in der Division dominierte die Anwendung schriftlicher Rechenverfahren (146 von 259 insgesamt erfassten korrekten Lösungen), gefolgt von den halbschriftlichen Rechenwegen schrittweise (39), Zehneranalogie (15), Nachbaraufgabe (20), gleichsinniges Verändern (4), Geteiltkette (4), sukzessiver Addition (2) oder Kopfrechnen (29). Tabelle 2 ist u.a. zu entnehmen, dass ca. 10% (33 bzw. 24 von 221 Kindern) bei den verwendeten Multiplikationsaufgaben in der Lage waren, wenigstens zwei verschiedene halbschriftliche Rechenwege (inklusive Kopfrechnen) anzugeben. Bei den Divisionsaufgaben konnten lediglich ca. 20 % (44 bzw. 54 Kinder) wenigstens einen halbschriftlichen Rechenweg angeben bzw. die Aufgaben im Kopf lösen.

Mittels Strukturgleichungsmodell (Cmin/df: 1,523; p: 0,003; CFI: 0,959; RMSEA: 0,049) wurde der Beitrag von „Operationsverständnis“, des „Erkennens von Zahl- und Aufgabenbeziehungen“ sowie des „Erkennens von Rechenwegen“ zu „flexiblen Rechenkompetenzen“ analysiert. Hierbei wurden keine Algorithmen (als korrekt) berücksichtigt. In Abb. 1 sind nur die signifikanten Pfade (Korrelationskoeffizienten, standardisierte Beta-Gewichte) eingezeichnet:



Das „Erkennen von Zahlbeziehungen" leistet einen Beitrag sowohl zum flexiblen Multiplizieren (p: 0,004) als auch zum flexiblen Dividieren (p<0,001). Dahingegen ist vom „Erkennen von Rechenwegen" lediglich ein Beitrag zur flexiblen Multiplikation (p: 0,038) zu erkennen. Die Ausprägung des Operationsverständnisses kann in Klasse 4 statistisch gesehen keine Unterschiede im flexiblen Rechnen erklären. In Passung zum erörterten theoretischen Hintergrund (vgl. Tab. 1) lässt sich der Befund folgendermaßen interpretieren: In der vierten Klasse beruhen Lösungsprozesse zur halbschriftlichen Multiplikation sowohl auf dem Erkennen und Nutzen von Zahl- und Aufgabenbeziehungen im Sinne des Emergenzmodells, als auch auf dem Erkennen und Nutzen eines Strategierepertoires im Sinne des Strategieauswahl-Modells. Bei der Lösung von Divisionsaufgaben kommt dem Nutzen lokaler Zusammenhänge und verbunden damit metakognitiven Lösungsprozessen im Sinne des Emergenzmodells eine noch sehr viel größere Bedeutung zu. Das Nutzen komplexer Zusammenhänge und damit eine breite Anwendung und Auswahl teils bereits automatisierter halbschriftlicher Rechenwege im Sinne der Nutzung eines Strategierepertoires leistet bei der Division noch keinen substanziellen Beitrag zur Lösungsfindung, wie dies bereits bei der flexiblen Multiplikation zu beobachten ist. Die Liste mit der im Text angeführten Literatur kann beim Autor per Email angefordert werden: andreas.schulz@ph-freiburg.de