

Heinz SCHUMANN, Weingarten

Polyeder-Metamorphosen – eine Anwendung raumgeometrischen Konstruierens

Der Raumgeometrie-Unterricht an allgemeinbildenden Schulen ist vor allem geprägt von Berechnungen an geometrischen Körpern als eine Anwendung von Formelwissen und numerisch-algebraischen Verfahren. Die Formenkunde stellt dafür einen bescheidenen Vorrat an solchen Körpern zur Verfügung. Sie hat dabei eher die Funktion einer „dienenden Magd“ als die der Entwicklung einer Formen-Systematik raumgeometrischer Figuren (u. a. Schumann 2009). Ein Aspekt einer solchen Entwicklung sind die Verwandlungen bzw. Metamorphosen und die damit verbundenen Verwandtschaften geometrischer Körper. Hier wollen wir unter der Metamorphose einer geometrischen Figur eine ihre Form variierende, nicht nur stetig verlaufende Verwandlung dieser Figur in eine neue Figur verstehen.

Dieser Beitrag beschäftigt sich mit besonderen Körper-Metamorphosen, nämlich denjenigen von Polyedern (u. a. Ziegler 2012). Neben der erkenntnis- und raumvorstellungsbildenden Bedeutung haben die Polyeder-Metamorphosen eine attraktive ästhetische Wirkung, welche in ihren Animationen zur Entfaltung kommt.

Das Lernen von Geometrie vollzieht sich an und mit adäquaten Realisaten geometrischer Figuren in physischer, handzeichnerischer, printmedialer und computergrafischer Darstellung. Mit der Verfügbarkeit von Dynamischen Geometrie-Systemen (DGS) und – seit etwa zehn Jahren – von Dynamischen Raumgeometrie-Systemen (*DRGS*) für den Geometrie-Unterricht besteht die Möglichkeit der interaktiven computergrafischen Konstruktion und dynamischen Variation geometrischer Figuren. Diese Darstellung geometrischer Figuren ist besonders für ihre Metamorphosen geeignet. Dabei kann das Primat physischer Primärerfahrung beim Raumgeometrie-Lernen nicht mehr aufrecht erhalten werden. So haben z. B. raumgeometrische Konstruktionen als räumliche Erweiterung der Zirkel-Lineal-Konstruktionen zu den Kugelzirkel-Planeal-Konstruktionen keine physische bzw. analoge Entsprechung; das trifft auch für zahlreiche direkte Manipulationen räumlicher Figuren zu. Viele Themen der Raumgeometrie, auch das Thema „Polyeder-Metamorphosen“, können überhaupt erst richtig durch die Nutzung von *DRGS* zugänglich gemacht werden (Schumann 2007 u. 2008). Dabei sind die Erfahrungen beim Agieren in den virtuellen Räumen der 3D-Computerspiele, welche von vielen Schülern und Schülerinnen heute gespielt werden, für die Nutzung eines *DRGS* von Vorteil.

Es existieren bereits ihren Verlauf wiedergebende Polyeder-Metamorphosen in Gestalt von fertigen *Animationsvideos*:

- als Export aus spezifischen *Polyeder-Tools* (z. B. GreatStella, <http://greatstella.en.softonic.com/> , auch als App MoStella)
- als *YouTube*-Videos (z. B. <https://www.youtube.com/watch?v=tzBN0Kr1Xes>)
- auf *Websites* (z. B. <http://www.math.uni-augsburg.de/~bernt/Archimedes/Stumpf-Stutz-Morph/index.html#imago>)
- auf *DVDs* (Lernmaterial, z. B. Schumann (2006): Interaktive Videos für die Raumgeometrie mit Cabri 3D. Rosenheim: co.Tec).

Diese Videos zeigen als „*Black-Box-Videos*“ zwar den Verwandlungsverlauf, aber nicht den Herstellungsprozess der Generierung einer Metamorphose.

Eine zeitgemäße, auf das Verstehen zielende Herstellung im Kontext der Schulgeometrie ist ihre Erzeugung mittels interaktiver Konstruktion in *DRGS*, z. B. in dem prototypischen *Cabri 3D* mit Verwendung des Zugmodus bzw. von Animationsoptionen. Dabei kommt man mit wenigen Konstruktionsoptionen aus. Besonders die Konstruktionen mit Kongruenzabbildungen und die Polyederkonstruktion als konvexe Hülle dienen einer ökonomischen Erzeugung. Für den Erwerb der *DRGS*-Konstruktionsfähigkeit und -fertigkeiten gibt es bereits geeignete Instruktionsvideos (Knapp 2011).

Folgende Formvariationen an Polyedern sind mit einem solchen *DRGS* herstellbar: *Ecken- und Kantenstumpfen*, *Sternen und Zelten*, *Durchdringen* (Verbundpolyeder), *Kantenknicken* usw. Besondere reichhaltige Metamorphosen sind jene mit *Invarianz der Ecken-Äquivalenz* (isogonale Metamorphosen) und *Flächen-Äquivalenz* (isoedrische Metamorphosen).

Als *erstes Beispiel* zeigen wir das Ergebnis einer *isogonalen Metamorphose*, welche auf dem Würfel und der Konstruktion eines Start-Polyeders basiert, dessen Ecken einander kongruent sind (Abbildung 1).

Mit dem Würfel beginnend, ergeben sich links herum, ohne Beachtung von Zwischenkörpern, folgende Archimedischen bzw. Platonischen Körper: *Würfel*, *Gestumpfter Würfel*, *Kuboktaeder*, *Ikosaeder*, *Oktaeder*, *Rhombenkuboktaeder* und wiederum der *Würfel*. Das Start-Polyeder erfährt mit seiner Verwandlung zum Ikosaeder sogar einen Symmetriegewinn!

Anmerkung: Den fachgeometrischen Hintergrund solcher Metamorphosen bildet die Theorie der Deckabbildungsgruppen von Polyedern. In unserem Beispiel erzeugen die Abbildungen der 24-elementige Untergruppe T_h der 48-elementige Deckabbildungsgruppe des Würfels die Metamorphose.

Geht man vom regelmäßigen Ikosaeder als Basispolyeder aus, so erhält man mit Anwendung der Gruppe *I* der Deckdrehungen des Ikosaeders und z. B. mit dem regulären Dodekaeder als Ausgangskörper folgende ecken-äquivalente Polyeder: *Dodekaeder*, *Ikosaeder*, *Ikosidodekaeder*, *Kleines Rhombenikosidodekaeder*, *Abgeschrägtes Dodekaeder*, *Gestumpftes Dodekaeder*, *Gestumpftes Ikosaeder*. Usw.

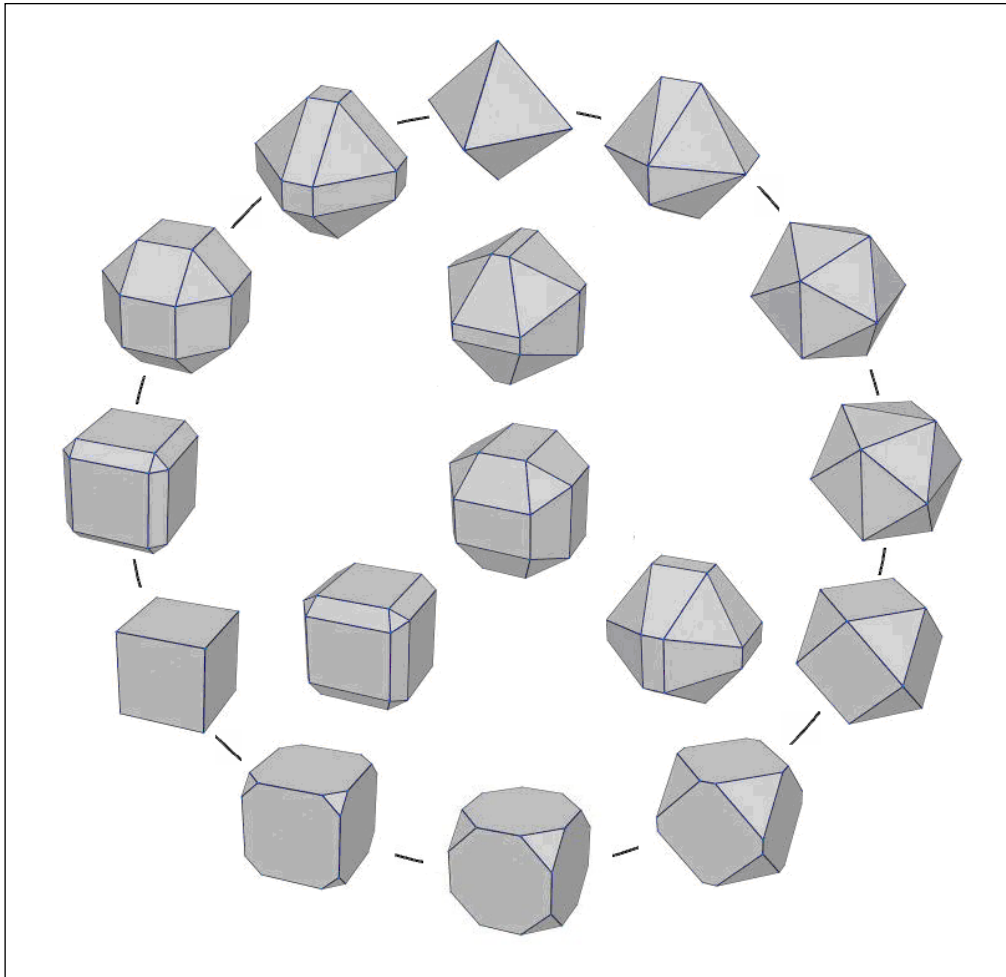


Abb. 1 Ein Zyklus isogonaler Polyeder vom Würfel aus

In einem *zweiten Beispiel* zeigen wir eine Metamorphose des regelmäßigen Iko-saeders, welche wegen Flächendurchdringungen, die keine vorstellbaren physischen Entsprechungen haben, als unreal zu bezeichnen ist. Dazu wird ein zehnfaches Teilnetz des Ikosaeders konstruiert, welches zusammen mit seinem Punktspiegelbild in seinem Winkel zwischen den Dreiecksflächen variiert werden kann (Abbildung 2). Man erhält so das *I-ko-saeder*, das *Oktaeder*, das „Doppeltetraeder“ *stella octangula*, das *Große Ikosaeder* (eines der vier nicht konvexen regelmäßigen Polyeder, auch Kepler-Poinsot-Körper genannt) und das *Hexagramm*, zehnfach aufeinander liegend (Abbildung 3).

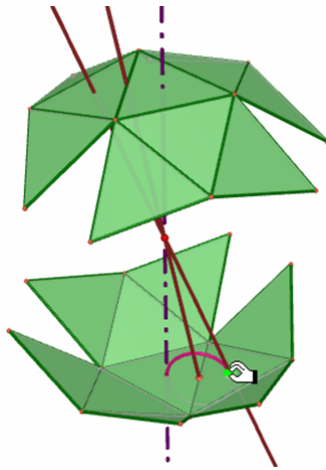


Abb. 2

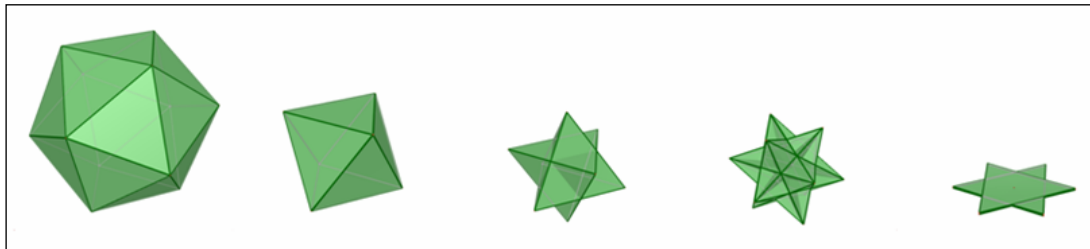


Abb. 3

Fazit: Als eine Anwendung raumgeometrischen Konstruierens mit *DRGS*, welche als Dynamische Geometrie-Systeme zugelassene Unterrichtssoftware sind, bietet das formenkundliche Thema „Polyeder-Metamorphosen“ ein interessantes und herausforderndes Arbeitsfeld für Schüler und Schülerinnen der oberen Sekundarstufe I und der Sekundarstufe II – und auch für Studierende des Lehramtes Mathematik. Das außerunterrichtliche Thema eignet sich u. a. für die Projektarbeit, für Arbeitsgemeinschaften und für individuelle Schülerarbeiten.

Literatur

- Knapp, O. (2011): Tutorial zum Lernen von Raumgeometrie für Schüler aller Schularten ab der Klassenstufe 7. Rosenheim: co.Tec Verlag.
- Schumann, H. (2007): Schulgeometrie im virtuellen Handlungsraum. Hildesheim: Franzbecker.
- Schumann, H. (2008). Interaktives geometrisches Konstruieren im virtuellen Raum. Teil 1 u. 2. Der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht MNU, Jg. 61, Heft 3, 145-149; Heft 4, 211-216.
- Schumann, H. (2009). Interaktive Polyederkonstruktion im virtuellen Raum – offene Aufgaben zum Thema „Raum und Form“. Der Mathematikunterricht MU 2009, 55. Jg., Heft 1, 26-37.
- Ziegler, R. (2012): Platonische Körper: Verwandtschaften, Metamorphosen, Umstülpungen. 4. Auflage. Dornach: Verlag am Goetheanum.