

Problemlösen – Mittels Irrtümern zu strukturellen Erkenntnissen

1. Einleitung

Beim Lösen von mathematischen Problemaufgaben in eigenen Erkundungen konnte beobachtet werden, wie Schüler zunächst einen aus Experten-sicht wenig erfolgversprechenden Lösungsansatz verfolgten. Dennoch kamen auch diese Schüler oftmals zu einer Lösung des Problems. Es stellte sich die Frage, ob das Gehen des Irrwegs bei der Lösungsfindung einen Nutzen hatte. Wie kamen die Schüler von einem „falschen“ zu einem „richtigen“ Vorgehen? War der Umweg für die Schüler hilfreich oder eher unnötige Zeitverschwendung? Kann man davon sprechen, dass die Schüler aus ihren Fehlern bzw. Irrtümern klug werden konnten?

2. Zum Begriff und Nutzen des Irrtums

Eine frühe Unterscheidung der Begriffe „Fehler“ und „Irrtum“ geht auf Weimer (1929) zurück. Demnach sei ein Fehler „eine Handlung, die gegen die Absicht ihres Urhebers vom Richtigen abweicht“ (S. 5) und ein Irrtum „ein seelischer Zustand, [ein] Fürwahrhalten des Falschen, das bedingt ist durch die Unkenntnis oder mangelnde Kenntnis gewisser Tatsachen“ (S. 5). Nach dieser Definition ist der Irrtum wohl eher charakteristisch für das Problemlösen, weil sich die Schüler dabei in Unkenntnis über ein passendes Lösungsverfahren befinden.

Der Irrtumsbegriff und der Nutzen des Irrtums für die Wissenschaften wurden vom Philosophen Mittelstraß genauer beschrieben. Nach Mittelstraß (1989) ist ein Irrtum einerseits „eine Bezeichnung für eine mit der Überzeugung der Wahrheit verbundene falsche Behauptung“ und andererseits „eine Eigenschaft dessen [...], der die Wahrheit sucht, sie aber verfehlt.“ (S. 92f). Diesen Scheinwiderspruch erklärt Mittelstraß, indem er sagt, dass Irrtümer „einen pragmatischen, das Wissen mit dem Handeln verbindenden Charakter“ (S. 93) hätten. Weingardt (2004) bewertet Mittelstraß' Differenzierung als „insofern hilfreich, als es deutlich macht, dass das ‚Vorantreten‘ dem Auffinden der Wahrheit dienlich ist, also die Irrtümer der Wahrheit nahe stehen können und nicht etwa ihr Gegenteil verkörpern“ (S. 207). Gerade beim Problemlösen suchen Schüler in unbekanntem Gebieten nach Regeln und Lösungswegen und „irren voran“ bei dieser Suche.

Mittelstraß untersucht die Rolle und den Nutzen von Irrtümern in der Wissenschaft und nennt Beispiele, in denen ein lang gehegter Irrtum dabei geholfen hat, neue Theorien zu entwickeln und Erkenntnisse zu gewinnen. So

hat Einstein die Relativitätstheorie unter der Annahme des sogenannten Machschen Prinzips entwickelt und hat erst nach der Formulierung der Relativitätstheorie festgestellt, dass das Machsche Prinzip bei gleichzeitiger Gültigkeit der Relativitätstheorie nicht gelten kann. Dennoch war das Machsche Prinzip bei der Entwicklung der Relativitätstheorie von Nutzen.

Besonders interessant ist die Frage, ob ein Irrtum beim Lösen von mathematischen Problemen in der Schule einen ähnlichen Nutzen haben kann wie beim Lösen wissenschaftlicher Probleme, wie Mittelstraß sie beschreibt.

Eine Theorie zum Nutzen des Fehlers bieten die Erziehungswissenschaftler Oser et al. (1999), die den Begriff des negativen Wissens geprägt haben. Für sie besteht der Nutzen von Fehlern insbesondere darin, dass durch Fehler gelernt werde, was man nicht tun darf (Handlungswissen) und was nicht zu einer Sache gehört (Abgrenzungswissen) (vgl. S. 17). Hierbei verstehen Oser et al. unter einem Fehler „von der Norm abweichende Sachverhalte oder von einer Norm abweichende Prozesse“ (S. 11). Dies schließt Fälle ein, in denen nach Mittelstraß ein Irrtum vorliegt, wenn Schüler im Glauben sind, das Richtige zu tun, aber ein von mathematischen Normen abweichendes Lösungsverfahren oder mathematische Struktur wählen. Durch das Aufdecken von Fehlern bzw. Irrtümern entstehe nach Oser et al. beim Problemlösen ein Wissen darüber, wie das Problem nicht zu lösen ist.

Wenn aber nur gelernt werden würde, wie ein Problem nicht zu lösen ist, würde man bei der Suche nach einem passenden Lösungsweg im Dunkeln tappen und vielleicht irgendwann zufällig einen passenden Lösungsweg finden. In den eigenen Erkundungen konnte ein derartiges Suchverhalten jedoch nicht beobachtet werden. Hier führte das Aufdecken eines Irrtums auch dazu, dass dem Schüler früher oder später klar wurde, wie er anstatt seines erfolglosen Irrwegs vorgehen muss. Es entsteht mehr als nur negatives Wissen, nämlich positives Wissen, welches vorher nicht vorhanden war, im Gegensatz zum Lernen aus Fehlern im Sinne Osers et al., bei denen das Richtige durch das Begehen eines Fehlers nun besonders hervortritt, aber nicht erst neu erkannt wird.

3. Methoden

Um näher bestimmen zu können, wie und welches positive Wissen aus Irrtümern gelernt wird, wurden Einzelinterviews mit Schülern der 4.-6. Klasse geführt, während derer sie aufgefordert wurden, typische Problemaufgaben laut denkend zu lösen. Die Transkripte der Interviews wurden im Sinne der Objektiven Hermeneutik nach Oevermann (1979) interpretiert und mithilfe der Abduktionstheorie nach Peirce (um 1900) analysiert.

4. Abduktionstheorie

Im Gegensatz zur Deduktion und zur Induktion ist die Abduktion ein Schluss, bei dem neue Erkenntnisse gewonnen werden können (vgl. Meyer 2007). Interessant sind für die oben genannte Fragestellung besonders solche Stellen, an denen der Erkenntnisgewinn beim Aufdecken von Irrtümern rekonstruiert werden kann. Hier gelang es durch Fallstudien einen allgemeinen Erkenntnisweg „Aus Irrtümern lernen“ theoretisch mit dem logischen Begriffsnetz nach Peirce herauszuarbeiten und zu charakterisieren.

5. Erkenntnisweg „Aus Irrtümern lernen“

Der Erkenntnisweg „Aus Irrtümern lernen“ umfasst mindestens vier verschiedene abduktive Schlüsse, deren ausführliche Darstellung allerdings den Rahmen dieses Textes sprengen würde. Der allgemeine Erkenntnisweg lässt sich am Einzelfall rekonstruieren, wie im Vortrag gezeigt wurde. Da die Rekonstruktion an realen Fällen recht komplex ist, soll hier eine kurze Konkretisierung an einem fiktiven, aber durchaus in ähnlicher Weise beobachteten Beispiel ausreichen.

x ist 3 Jahre älter als y und x ist 5 Jahre älter als z. Zusammen sind die drei 37 Jahre alt. Wie alt ist x?

Kasten 1: Altersproblem

Bei Altersproblemen wie dem in Kasten 1 kann die Mathematisierung der Aufgabenstellung für Schüler schwierig sein. So kann es sein, dass ein Schüler den Aufgabentext „x ist d Jahre älter als y“ folgendermaßen in eine irrtümliche Formel überträgt: „ $x + d = y$ “. Arbeitet der Schüler mit dieser Mathematisierung kommt er mit der Formel $x + y + z$, in die er z.B. systematisch Werte für x und entsprechend für y und z einsetzt, nicht zu einer Lösung des Problems, wie er durch Validierung am Aufgabentext feststellen kann. Für $x = 9$ ergibt sich $9 + 12 + 14 = 35$ und für $x = 10$ ergibt sich $10 + 13 + 15 = 38$. Beim Erkenntnisweg „Lernen aus Irrtümern“ ist eine wichtige Voraussetzung, dass Schüler ihre Irrtümer selber aufdecken können, etwa durch eine genannte Validierung. Hierbei ist es wichtig, dass keine Scheinlösungen möglich sind. Eine Scheinlösung im Beispiel ergäbe sich, wenn trotz der irrtumbelasteten Mathematisierung eine ganzzahlige Lösung erzielt werden könnte. Ob dies möglich ist, hängt von den in der Aufgabe eingesetzten Zahlen ab.

Bis hierhin wurde im Sinne Osers bereits negatives Wissen erlangt darüber, wie das Problem nicht zu lösen ist. Nun kann der Schüler nach Gründen für sein Scheitern suchen. Entdeckt er hierbei, dass seine vorgenommene Mathematisierung des Aufgabentextes nicht zum Problem passt, besteht die

Chance, dass er erkennt, wie eine passendere Mathematisierung und damit ein verbessertes Lösungsverfahren aussehen kann: wenn x um d älter als y ist, dann ist x größer als y und folglich muss der Abstand d zu y dazu addiert werden und nicht zu x . Also muss gelten „ $x = y + d$ “.

Für den Mathematikunterricht ist an dieser Stelle im Problemlöseprozess der mathematische Erkenntnisgewinn aus dem Irrtum besonders interessant, wenn sich dieser nicht nur auf die bearbeitete Problemaufgabe beschränkt, sondern auch bei anderen Aufgaben im Mathematikunterricht genutzt werden kann. Das positive Wissen, welches hier entsteht, wäre in diesem Fall über die Problemstellung hinaus nutzbar.

6. Fazit und Ausblick

Es ist gelungen, das Lernen aus Irrtümern theoretisch zu beschreiben und die Entstehung negativen und positiven Wissens beim Lernen aus Irrtümern mithilfe logischer Analysen zu rekonstruieren. Die Vermutung, dass Irrtümer nützlich für das Problemlösen sein können, konnte theoretisch begründet werden. Als besondere Voraussetzungen für das Lernen aus Irrtümern konnten die Möglichkeit der Validierung gefundener Lösungen am Aufgabentext und die Vermeidung von Scheinlösungen bei der Aufgabenkonstruktion identifiziert werden.

Interessant für Lehrkräfte ist die sich anschließende Frage, wie Irrtümer beim Problemlösen fruchtbar genutzt werden können, ob beispielsweise auch das stellvertretende Lernen aus den Irrtümern von Mitschülern möglich ist und welche Irrtümer bei bestimmten Problemaufgaben besonders häufig vorkommen und besonders gut nutzbar sind.

Literatur

- Meyer, M. (2007). Entdecken und Begründen im Mathematikunterricht. Von der Abduktion zum Argument. Hildesheim: Franzbecker.
- Mittelstraß, J. (1989). Der Flug der Eule. Von der Vernunft der Wissenschaft. Suhrkamp: Frankfurt.
- Oser, F., Hascher, T. & Spychiger, M. (1999). Lernen aus Fehlern. Zur Psychologie des „negativen“ Wissens. In W. Althof (Hrsg.), Fehlerwelten. Vom Fehlermachen und Lernen aus Fehler (S. 11-41). Opladen: Leske + Budrich.
- Peirce, C. S. Collected Papers of Charles Sanders Peirce, (Band 1-6. Hartshorne, C. & Weiß, P. (Hrsg.), 1931-35; Band 7-8 Burks, A.W. (Hrsg.), 1985), Cambridge: Harvard University Press.
- Weimer, H. (1929). Psychologie der Fehler. Leipzig: Klinkhardt.
- Weingardt, M. (2004). Fehler zeichnen uns aus. Transdisziplinäre Grundlagen zur Theorie und Produktivität des Fehlers in Schule und Arbeitswelt. Bad Heilbrunn: Klinkhardt.