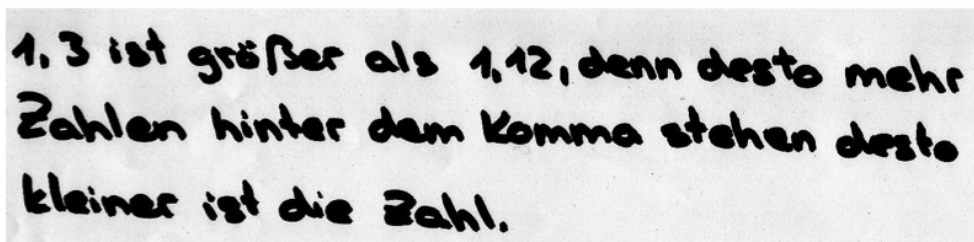


Lara SPRENGER, Florian SCHACHT, Stephan HUBMANN

Diagnose und Förderung eines nachhaltigen Dezimalzahlverständnisses aus inferentialistischer Sicht

Einführung

In der Schule und vor allem auch im Alltag ist der verständige Umgang mit Dezimalbrüchen von zentraler Bedeutung (vgl. Padberg 2009). Durch die Erfahrungen z.B. mit Geld und Größen bringen die Schülerinnen und Schüler diverse Vorkenntnisse in diesem Bereich mit. Dennoch zeigen sich selbst bei Schülerinnen und Schülern am Ende der Sekundarstufe I immer wieder spezifische Hürden, insbesondere beim Ordnen mehrerer Dezimalbrüche. Das folgende Beispiel einer Schülerin aus einer achten Klasse (Abb. 1) verdeutlicht eine typische Verständnishürde. Es wird auch deutlich, dass einem richtigen Ergebnis nicht notwendigerweise eine mathematisch tragfähige Strategie zugrunde liegen muss.



1,3 ist größer als 1,12, denn desto mehr
Zahlen hinter dem Komma stehen desto
kleiner ist die Zahl.

Abb. 1: Aussage von Marie, 8. Klasse Realschule, beim Zahlvergleich von 1,3 und 1,12

Diese und ähnliche Fehlerstrategien sind zahlreich dokumentiert (u. a. Padberg 2009; Heckmann 2006; Steinle & Stacey 2004). Insgesamt besteht allerdings nach wie vor eine Forschungslücke bei der Rekonstruktion von Lernprozessen und individuellem Schülerhandeln beim situationspezifischen Umgang mit Dezimalbrüchen. Im vorliegenden Beitrag werden erste Ergebnisse aus einem Projekt zur Nutzung unterschiedlicher Strategien beim Vergleich von Dezimalbrüchen diskutiert. Dabei steht die Identifizierung von Lernpfaden im Fokus, um Argumentationslogiken der Strategieverwendung und das zugrundeliegende konzeptionelle Verständnis zu rekonstruieren. Dies soll genutzt werden, um Lernende adäquat zu fördern, indem Lerngegenstand und Lernumgebung entsprechend restrukturiert werden.

Der theoretische Zugriff mit Festlegungen und Inferenzen

Die vorliegende Studie hat insofern einen doppelten Anspruch, als die Beforschung von individuellen Lernprozessen zum Umgang mit Dezimalbrüchen eng verknüpft ist mit der Weiterentwicklung des Lehr-/Lernarrangements. Sowohl auf der konstruktiven als auch auf der rekon-

struktiven Ebene wird ein epistemologischer und sprachanalytischer Theorierahmen genutzt, der es möglich macht, einerseits zentrale Setzungen im Lehr-/Lernarrangement mit den individuellen Begriffsbildungsprozessen der Lernenden in Beziehung zu bringen, andererseits die zu lernenden und die individuellen Konzepte inferentiell nach den genutzten Argumenten zu gliedern, um daraus tragfähige Lernpfade zu gewinnen. Begriffe werden dabei verstanden als Prädikate in Aussagen, auf die sich ein Individuum festlegt (vgl. Hußmann / Schacht 2015). Festlegungen sind Behauptungen in propositionaler Form, die das Subjekt für wahr hält. Festlegungen können als Gründe dienen, insofern sind Festlegungen inferentiell gegliedert. Dabei können individuelle Festlegungen und Inferenzen in der empirischen Analyse rekonstruiert werden, während sich mit Hilfe konventionaler Festlegungen und Inferenzen mathematische Gegenstandsbereiche, Begriffsnetze und prototypische Lernpfade aus normativer Sicht strukturieren lassen.

Das Untersuchungsdesign

Die Studie ist als Fachdidaktische Entwicklungsforschung angelegt, bei der die Beforschung von Lehr-/Lernprozessen ebenso im Forschungsinteresse steht wie die Entwicklung von Lehr-/Lernarrangements (vgl. Prediger et al. 2012). Die vier Phasen der fachdidaktischen Entwicklungsforschung gliedern sich in die *Spezifizierung und Strukturierung von Lerngegenständen*, die *Entwicklung eines Designs*, die *Durchführung und Auswertung von Design-Experimenten* und die *(Weiter)Entwicklung von lokalen Theorie*. Ausschlaggebend in diesen Forschungs- und Entwicklungsprozessen sind vier Leitideen: Die *Gegenstandsorientierung*, d. h. die Hinterfragung und Rekonstruktion der fachlichen Gegenstände und ihrer fachlichen Strukturierung, die *Prozessorientierung*, die den Fokus auf die Lernprozesse mit ihren Voraussetzungen, Verläufen, Hürden, Bedingungen und Wirkungen legt, sowie der *zyklische Ablauf* von Forschung und Entwicklung mit dem Bestreben der *Vernetzung* der Arbeitsbereiche. In diesem Beitrag beschäftigen wir uns vor allem mit der Spezifizierung und Strukturierung des Lerngegenstandes und der Entwicklung des Designs. Die empirischen Ergebnisse des ersten Forschungszyklus bilden dabei die Grundlage für die fachliche (Re-)Strukturierung des Lerngegenstandes sowie für die Weiterentwicklung des Designs. Den Aufgaben des Lehr-/Lernarrangements lagen folgende Designprinzipien zugrunde, die eng mit dem sprachanalytischen Rahmen verknüpft sind: (1) Diskursive und kommunikative Gestaltung der Lehr-/Lernumgebung, (2) inferentielle Gliederung der zentralen Konzepte, (3) Explizierung und Reflexion von (Fehl)Festlegungen durch

die Lernenden und (4) die Nutzung unterschiedlicher Repräsentationsebenen.

Normative Strukturierung des Gegenstandsbereiches

Vor dem Hintergrund der vielfältigen Forschungsergebnisse zu unterschiedlichen Strategien zum Dezimalbruchvergleich wurden idealtypische Lernpfade entwickelt, d.h. die Strategien wurden auf Basis einer formalen, semantischen und epistemologischen Analyse gegliedert. Der Fokus lag auf der Komplexität der Argumente und der verwendeten Argumentationsbasen wie z.B. Stellenwerttafel oder Zahlenstrahl. Beispielsweise ist es aus normativer Sicht sinnvoll, dass die Strategie des Vergleichs durch Ergänzen von Nullen, um die Nachkommastellen zahlweise und nicht die ziffernweise bzw. stellenweise zu vergleichen, auf der Strategie des Stellenweise-Vergleichens (von links nach rechts mit Hilfe der Stellentafel) fußt. Vor dem Hintergrund dieser normativen Strukturierung wurden verschiedene fachlich tragfähige und linear strukturierte Lernpfade entwickelt.

In der anschließenden empirischen Erhebung wurden die folgenden Forschungsfragen bearbeitet: (1) Inwiefern nutzen die Lernenden spezifische Strategien beim Vergleich von Dezimalzahlen und begründen diese durch situationsspezifische (individuelle) Festlegungsnetze? (2) Welche Erkenntnisse liefert die empirische Untersuchung für die Restrukturierung des Gegenstandes und des Lernarrangements?

Ergebnisse und Diskussion

Im Folgenden werden exemplarisch das Vorgehen dargelegt und erste Ergebnisse der Studie dargestellt. Grundlage für den in diesem Beitrag dargestellten Zugriff ist ein Partnerinterview mit zwei Schüler/innen einer achten Klasse zum Vergleich von Dezimalbrüchen. Innerhalb eines kurzen Zeitraums im Interview nutzen die beiden Lernenden die folgenden drei Strategien, mit dem Ziel die zwei Dezimalbrüche 1,12 und 1,3 zu vergleichen. Der Pfeil deutet die verwendeten inferentiellen Gliederungen an.

St1: Nachkommastellen sind natürliche Zahlen $\rightarrow 12 > 3 \rightarrow 1,12 > 1,3$

St2: a weiter rechts auf dem Zahlenstrahl als b $\rightarrow 1,3 > 1,12$

St3: Eine nat. Zahl a hat mehr Ziffern als eine natürliche Zahl b $\rightarrow 12 > 3 \rightarrow$ zwei Dezimalzahlen a und b unterscheiden sich nur durch die Nachkommastellen und a hat mehr Nachkommastellen als b $\rightarrow a < b \rightarrow 1,12 < 1,3$

Diese Rekonstruktionen der individuellen Argumentationslogiken bringen etwa zum Ausdruck, dass sich zwei fast gleichzeitig aktivierte Argumentationslogiken widersprechen (St1 und St3). Gleichzeitig wird deutlich, in-

wiefern individuelle Logiken in Abhängigkeit der Nutzung bestimmter Repräsentationsebenen aktiviert werden (St. 2).

Diese und weitere Analysen zeigen für die betrachteten Fälle folgendes:
Die Lernenden

- verknüpfen Strategien und Konzepte aus unterschiedlichen Lernpfaden miteinander, nutzen dabei eine Vielzahl an nicht tragfähigen Schlüssen, die jedoch aus individueller Perspektive meist in sich schlüssig sind;
- halten an wenigen zentralen individuellen Argumenten fest und versuchen alle weiteren Aussagen damit zu stützen. Es zeigte sich, dass die Auseinandersetzung mit eigenen bzw. fiktiven Schülerfestlegungen die Modifikation eigener (nicht tragfähiger) Festlegungen und deren inferentieller Gliederung fördert;
- begründen die Tragfähigkeit von Strategien mit der Gültigkeit des Ergebnisses, ändern jedoch Ergebnisse je nach Argumentationsbasis ab und zeigen sich von der Widersprüchlichkeit unbeeindruckt.

Für die Restrukturierung des Lerngegenstandes und der Lernumgebung und damit für den nächsten Zyklus des Designexperiments werden diese Aspekte aufgenommen und Aufgabenformate entwickelt, die die netzartige Struktur der verwendeten Konzepte anspricht und es ermöglichen, die zentralen indiv. Argumente zum Gegenstand einer eingehenden Analyse zu machen.

Literatur

- Heckmann, K. (2006): Zum Dezimalbruchverständnis von Schülerinnen und Schülern. Berlin: Logos Verlag.
- Hußmann, Stephan & Schacht, Florian (2015): Fachdidaktische Entwicklungsforschung in inferentieller Perspektive am Beispiel von Variable und Term. *Journal für Mathematikdidaktik*, 35(1), doi:10.1007/s13138-014-0070-9.
- Padberg, F. (2009): Didaktik der Bruchrechnung. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag.
- Prediger, S., Link, M., Hinz, R., Hußmann, S., Ralle, B. & Thiele, J. (2012): Lehr-Lernprozesse initiieren und erforschen. Fachdidaktische Entwicklungsforschung im Dortmunder Modell.
- Roche, A., & Clarke, D. (2004). When does successful comparison of decimals reflect conceptual understanding? In I. Putt, R. Faragher, & M. McLean, *Mathematics education for the third millennium: Towards 2010*. V. 2, pp. 486–493. Sydney: MERGA.
- Steinle, V. & Stacey, K. (2004): A Longitudinal Study of Students' Understanding of Decimal Notation: An Overview and Refined Results. In: I. Putt, R. Faragher, & M. McLean (Eds.): *Mathematics education for the third millennium: Towards 2010*. V. 2, 541-548. Townsville: MERGA.