Petra Carina TEBAARTZ, Gießen

Eigenproduktionen zu Beweisaufgaben von Teilnehmerinnen und Teilnehmern der Mathematik-Olympiade

Dieser Beitrag gibt einen Einblick in die Heterogenität von Eigenproduktionen zu Beweisaufgaben durch Teilnehmerinnen und Teilnehmer der Mathematik-Olympiade. 216 Wettbewerbsteilnehmende in den Klassenstufen 5 bis 13 wurden im Rahmen der mathematischen Sommerakademie 2013 des Landesverbands Mathematikwettbewerbe NRW e.V. zum Beweisen aufgefordert. In den unteren Klassenstufen sind die Unterschiede besonders differenziert. Deshalb werden, nach einer kurzen Einführung des theoretischen Rahmens, exemplarisch Eigenproduktionen von Fünftklässlern analysiert und mögliche Bedingungsfaktoren der heterogenen Leistungen ausgeführt.[1]

Theoretischer Rahmen zur Beschreibung von Schülerproduktionen zu Beweisaufgaben

Im Folgenden werden unter dem Begriff „Beweisaufgaben" ausschließlich Interpolationsaufgaben verstanden. Die Bearbeitungen solcher Aufgaben werden auf die verwendeten Schlussweisen sowie deren Vollständigkeit und Korrektheit untersucht. Dafür wird unterschieden, ob ein begründender Ansatz erkennbar ist oder ob die zu zeigende Aussage ausschließlich induktiv überprüft wird. Mit dem Ausdruck „Begründung" soll dabei hervorgehoben werden, dass der Grad an formalsprachlicher Darstellung nicht berücksichtigt wird und zudem neben strengen Beweisen auch andere Begründungsformen mitgedacht sind. Um die vorliegenden Begründungen näher zu beschreiben, wurden die Argumentketten der Probanden zunächst auf Grundlage der verwendeten Wissensbasen zu verschiedenen fachinhaltlichen Herangehensweisen gruppiert und mithilfe des Schemas von Toulmin (1996) rekonstruiert. Für jede dieser Herangehensweisen wurde anschließend festgelegt (definiert), welche Argumente erwartet werden, um eine Begründung als vollständig und korrekt zu bezeichnen. Hierauf aufbauend werden an den Schülerdokumenten die Vollständigkeit und Korrektheit der Begründungen erfasst. Außerdem wird unterschieden, ob die Schlussweise in einer Begründung deduktiv ist oder zwischen induktiv und deduktiv liegt. Dabei ist Letzteres der Fall, wenn eine Deduktion einer Argumentkette an einem Spezialfall vollzogen wird.

[1] Die theoretischen Grundlagen, das methodische Vorgehen und weitere Ergebnisse eines Auszugs der schriftlichen Befragung werden in Tebaartz und Lengnink (in Druck) vorgestellt.

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

Eigenproduktionen von Fünftklässlern

Aufgabe 1: Teilbarkeit Zeige: *Die Summe von drei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen ist durch drei teilbar.*	
Bearbeitung 1: fehlerhafte induktive Prüfung $3+4+5 = 12 = 12 : 3 = 4$	Bearbeitung 4: deduktive, unvollständige und fehlerhaft Begründung weil wenn ABC +1 ergibt A=B=C
Bearbeitung 2: zwischen induktiv und deduktive, unvollständige und fehlerhafte Begründung 123 = 6 6:3=2 234 = 9:3=3 345 = 12:3=4 usw... Die Zahl wird bei jeder Ziffer um 1 größer. 1 2 3 = 6 +1 +1 +1 = 3 2 3 4 = 8 Insgesamt (für jede Stelle sind das insgesamt 3.	Bearbeitung 5: deduktive, vollständige und korrekte Begründung 1+2+3 = 6 6:3=2 2+3+4=9 9:3=3 3+4+5=12 12:3=4 Die Summe von drei aufeinanderfolgenden Zahlen ist durch 3 teilbar, da die erste Folge 0+1+2=3 3:3=1 durch 3 teilbar ist. In jeder nächster Zahlenfolge kommen immer 3 dazu, da alle Zahlen 1 größer werden. So sind alle Folgen durch 3 teilbar 11+12+13=36 36:3=12
Bearbeitung 3: deduktive, unvollständige und korrekt Begründung 3+4+5=12 12:3=4 12+13+14=39 39:3=13 7+8+9=24 24:3=8 16+17+18=51 51:3=17 Es funktioniert bei jeder Zahlenfolge da jede dritte Zahl durch drei teilbar ist und wenn bei den drei Zahlen eine Zahl vorkommt die durch drei teilbar ist, was immer der Fall ist, so entsteht wieder eine durch drei teilbare Zahl.	Bearbeitung 6: deduktive, vollständige und korrekte Begründung $n \in \mathbb{N}$ $\frac{n + n+1 + n+2}{3}$ $\Leftrightarrow \frac{3n+3}{3}$ Die Summe 3 aufeinanderfolgenden Zahlen ist immer 3n+3. Jede natürliche Zahl, die mit 3 multipliziert wird, ist auch durch 3 teilbar, denn das Produkt hat mindestens einen Faktor 3. Da jede dritte Zahl durch drei teilbar ist, ist die Zahl immernoch durch 3 teilbar, wenn wir 3 addieren.

Abb. 1: Aufgabe 1, sechs Bearbeitungen von Fünftklässlern

In der schriftlichen Befragung sollte u.a. bewiesen werden, dass die Summe dreier aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen durch drei teilbar ist. Abb. 1 zeigt sechs Eigenproduktionen der insg. 24 Fünftklässler. In Bearbeitung 1 wird die Behauptung ausschließlich am Beispiel der aufeinanderfolgenden Zahlen 3, 4 und 5 überprüft. Dabei enthält die numerische Darstellung einen Fehler, der darauf hindeutet, dass das Gleichheitszeichen prozedural, d.h. als Ergebniszeichen, gedeutet wurde. In Dokument 2 wurde aus den Beispielen heraus eine Begründung für die Richtigkeit der zu zeigenden

Aussage entwickelt, wobei der Ausdruck „usw.“ die Allgemeingültigkeit der Überlegungen andeutet. Allerdings ist die Begründung nicht korrekt, weil z.B. anstatt der Addition „1+2+3“ die Zahl „123“ aufgeschrieben wurde. Auch der Satz „Die Zahl wird bei jeder Ziffer um 1 größer“ deutet eine nicht vollständig korrekte Interpretation des Ausdrucks „aufeinanderfolgende Zahlen“ an. Bei Bearbeitung 3 ist die Schlussweise deduktiv. Jedoch ist fraglich, ob der Proband erklären könnte, warum aus der Teilbarkeit durch drei einer der aufeinanderfolgenden Zahlen die zu zeigende Aussage folgt. Demgegenüber ist die Grundidee in Bearbeitung 4 vollständig repräsentiert und es liegen primär Schwierigkeiten in der sprachlichen Darstellung vor. Der Pfeil mit der Anmerkung „+1 abgibt“ verdeutlicht, dass von einer Zahl eins subtrahiert und zu einer anderen Zahl addiert wird. Berücksichtigt man die Voraussetzung, dass es sich um drei aufeinanderfolgende Zahlen handeln soll, und (offensichtlich) C für die größte der drei Zahlen steht, so ist plausibel, dass A = B = C – beziehungsweise mathematisch korrekt (A+1) = B = (C–1) – gilt. Angesichts dieser Beweisführung könnte der Schüler die zu zeigende Teilbarkeit als offensichtlich angesehen haben. Die letzten beiden Bearbeitungen (Dokumente 5 und 6) sind deduktive, korrekte und vollständige Begründungen, die schließlich auf große Unterschiede in der Herangehensweise und im Grad an formalsprachlicher Ausführung auch zwischen Bearbeitungen innerhalb der gleichen Kategorien hinweisen. In Bearbeitung 6 werden Fachausdrücke wie „natürliche Zahl“ und „Produkt“ sowie die Variable n, Terme und das mathematische Symbol für „Element von“ verwendet. Die Schülerin scheint mit der Termdarstellung bereits über ein „fertiges Konzept“ für solche Aufgaben zu verfügen. In Bearbeitung 5 ist die Darstellung weitaus umgangssprachlicher. Der Schüler scheint zudem aus den Beispielen heraus, insbesondere der Beobachtung der Invariante („In jeder nächsten Zahlenfolge kommen immer 3 dazu“), die Beweisidee entwickelt zu haben.

Mögliche Bedingungsfaktoren

Die Bearbeitungen in Abb. 1 zeigen auf, dass die Leistungen der Fünftklässler teils weit über die Vorgaben im Kernlehrplan NRW hinausgehen, wonach Lernende am Ende der sechsten Klassenstufe Aussagen intuitiv begründen können sollen (MSW, 2007). Dies scheint bei einigen Probanden mit einer Förderung in Mathematik zusätzlich zum Regelunterricht zusammenhängen. Während z.B. fünf der elf vor der Erhebung noch nicht geförderten Fünftklässler die zu zeigende Aussage ausschließlich überprüft haben (siehe Abb. 1, Bearbeitung 1), trifft dies nur auf einen der 13 Probanden zu, die bereits gefördert wurden, etwa in einer mathematischen Arbeitsgemeinschaft in ihrer Schule. Insbesondere deutet die Datenlage an, dass weit über die curricularen Vorgaben hinausgehende Leistungen eine intensive Förderung in Mathematik voraussetzen. Beispielsweise hat die Autorin der Bearbeitung 6 in Abb. 1 angegeben, einmal in der Woche Mathematikunterricht von einer Studentin zu erhalten. Neben der unterschiedlichen Teilhabe an Förderangeboten kann die Heterogenität der Schülerproduktionen u.a. damit zusammenhängen, dass in der Untersuchungspopulation ein breit gefächertes Spektrum an Leistungen vorliegt, von Teilnehmenden der Mathematik-Olympiade 2012/13, die nur die Schulrunde bestritten haben, bis hin zu Preisträgern der Bundesrunde. Da bei der Mathematik-Olympiade mit steigender Klassen- und Wettbewerbsstufe tendenziell mehr und komplexere Beweise gefordert werden, sind v.a. ab der siebten Klassenstufe bei mehreren Aufgaben deutliche Differenzen zwischen Bearbeitungen unterschiedlich erfolgreicher Probanden erkennbar.

Diskussion

Die Ergebnisse der vorliegenden Untersuchung deuten an, dass zwischen Teilnehmenden der Mathematik-Olympiade in der gleichen Klassenstufe deutliche Unterschiede in den Bearbeitungen von Beweisaufgaben bestehen, die insb. ab der Klassenstufe 7 mit unterschiedlichem Wettbewerbserfolg einhergehen und durch die Teilnahme einiger Lernender an Förderangeboten im mathematischen Bereich verstärkt werden. Hierbei ist v.a. zu beachten, dass es sich nur um eine explorative Studie handelt. Zudem können weitere Faktoren wie der individuelle Mathematikunterricht der Probanden die Bearbeitung der Beweisaufgaben beeinflusst haben (siehe auch Reiss, Hellmich & Thomas, 2002). Jedenfalls machen die Ergebnisse Mut, Förderkomponenten zur Beweiskompetenz von jungen mathematisch interessierten Schülerinnen und Schülern zu entwickeln.

Literatur

Ministerium für Schule und Weiterbildung des Landes Nordrhein-Westfalen (2007). *Kernlehrplan für das Gymnasium – Sekundarstufe I (G8) in Nordrhein-Westfalen.* Verfügbar unter http://www.standardsicherung.schulministerium.nrw.de/lehrplaene/ upload/lehrplaene_download/gymnasium_g8/gym8_mathematik.pdf [05.02.2015].

Reiss, K., Hellmich, F., Thomas, J. (2002). Individuelle und schulische Bedingungsfaktoren für Argumentationen und Beweise im Mathematikunterricht. In M. Prenzel & J. Doll (Hrsg.), *Bildungsqualität von Schule: Schulische und außerschulische Bedingungen mathematischer, naturwissenschaftlicher und überfachlicher Kompetenzen.* 45. Beiheft der Zeitschrift für Pädagogik (S. 51–64). Weinheim: Beltz.

Tebaartz, P. C. & Lengink, K. (in Druck). Was heißt mathematischer Beweis? – Realisierungen in Schülerproduktionen. In A. Budke, A. Creyaufmüller, M. Kuckuck, M. Meyer, F. Schäbitz, K. Schlüter & G. Weiss (Hrsg.), *Fachlich argumentieren lernen*. Münster: Waxmann.

Toulmin, S. E. (1996). *Der Gebrauch von Argumenten*. Weinheim: Beltz.