Alexandra THIEL-SCHNEIDER, Dortmund

Wie gelingt die Verbindung unterschiedlicher Perspektiven auf exponentielles Wachstum?

Der Begriff des exponentiellen Wachstums bildet einen zentralen Aspekt für das Mathematiklernen in der Sekundarstufe I. Der Aufbau eines tragfähigen Verständnisses exponentieller Wachstumsprozesse ist bedeutend für die Weiterentwicklung des Verständnisses exponentieller Funktionen in der Sekundarstufe I und II. Ergebnisse im Rahmen von Design-Experimenten zeigen (vgl. Thiel-Schneider 2014), dass eine typische Schwierigkeit für Schüler/innen in der inhaltlichen Unterscheidung von ganzzahligen und nicht ganzzahligen Wachstumsfaktoren liegt. Der vorliegende Beitrag konzentriert sich darauf aufzuzeigen, wie eine Verbindung unterschiedlicher Perspektiven auf exponentielles Wachstum mit Hilfe einer Intervention mit einem geeigneten Anschauungsmittel gelingen kann.

1. Spezifiziertes Forschungsinteresse und methodologischer Zugang

Lernende neigen dazu, zuvor entwickelte lineare Konzepte auf exponentielle Zusammenhänge zu übergeneralisieren und exponentielle Wachstumsprozesse falsch zu deuten (vgl. Ebersbach & van Dooren 2008). Dem gegenüber stehen Herausforderungen wie Kovariation und Änderungsraten, die bei exponentiellem Wachstum eine zentrale Rolle spielen. Lernende, die den Begriff des exponentiellen Wachstums noch nicht kennengelernt haben, zeigen drei intuitive Vorstellungen von exponentiellen Änderungsraten: a) multiplikativ, (b) additiv und (c) proportional new to old, zu dem vorherigen Wert wird ein proportionaler Anteil davon, hinzuaddiert (vgl. Confrey & Smith 1995). Diese und weitere Studien zeigen (vgl. Ellis et al. 2012), dass eine Fokussierung auf den Kovariationsaspekt einen effektiven Ansatz zur Vorstellungsentwicklung bei exponentiellem Wachstum leisten kann. Weitere differenzierte Studien zur Entwicklung von Lernprozessen bei exponentiellem Wachstum, z.B. wie unterschiedliche Perspektiven auf exponentielles Wachstum gelingen können, sind bislang wenig vertreten (vgl. Ellis 2012). Deshalb befasst sich diese Studie im Rahmen fachdidaktischer Entwicklungsforschung (Hußmann et al. 2013) u.a. mit der Erforschung von Lernprozessen zur Begriffsbildung exponentieller Funktionen. Es soll analysiert werden, welche Gelingensbedingungen beim Vorstellungsaufbau unterstützen und welche Hürden auftreten können.

2. Methodische Umsetzung

Die Erhebung der Daten findet in drei Zyklen von Designexperimenten (vgl. ebd) statt, größtenteils in Form von klinischen Interviews. Die Analy-

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

se der Begriffsbildungsprozesse erfolgt mit Hilfe der Theorie der inferentiellen Begriffsbildung (vgl. Hußmann 2013). Auf der Entwicklungsebene wurde im Rahmen des Projektes KOSIMA (vgl. Hußmann et al. 2011) ein Lehr-Lernarrangement mit dem sinnstiftenden Kontext ‚Sparstrategien – Wie kann ich mein Geld gewinnbringend anlegen?' entwickelt. Im ersten Teilkapitel soll das Kapital bei gegebenem Zinssatz und Startkapital nach mehreren Jahren in einem Schritt bestimmt werden, im zweiten Teilkapitel erkunden die Lernenden u.a., welche Strategien vom proportionalen Denken auf exponentielles Wachstum übertragen werden können.

3. Auszug eines möglichen Lernverlaufes

Der erste Designzyklus dient zur Entwicklung der Kernidee und des sinnstiftenden Kontextes der Lernumgebung und zielt auf erste Erkenntnisse über die Lernendenperspektive. Im zweiten Design-Zyklus wird die Lernumgebung erstellt und Lernprozesse und individuelle Vorstellungen zu spezifischen Aspekten des exponentiellen Wachstums erforscht. U.a. wird im Rahmen von Einzel- und Partnerinterviews (n=12) beobachtet, dass bei einigen Lernenden, unabhängig davon, ob sie mit der entwickelten Lernumgebung gearbeitet haben, am Ende des Lernprozesses bei ganzzahligen Wachstumsfaktoren die Vorstellung der proportional new to old-Änderungsrate nicht hinreichend vorhanden ist. Es fehlt die Vorstellung, dass z.B. bei einer Verdreifachung zu dem vorherigen Wert das Zweifache des vorherigen Werts addiert wird bzw. dass zu den vorhandenen 100% ein dazu proportionaler Anteil von 200% addiert wird. Dies ist jedoch Voraussetzung, um das später zu entwickelnde Kalkül inhaltlich zu stützen. Auch bei prozentualen Wachstumsfaktoren ist die Vorstellung der multiplikativen Änderungsrate nicht hinreichend vorhanden. Die Analyse der Interviews zeigt, dass die Lernenden dazu neigen, prozentuales Wachstum mit der Zinseszinsformel $K_n=K_0(1+p/100)^n$ zu verbinden. Allerdings können sie die einzelnen Elemente der Formel nicht erklären und es fehlt die Vorstellung der multiplikativen Änderungsrate, für die Lernenden ist bei dem prozentual gebildeten Faktor 1+p/100 die Addition die präferierte Operation. Es findet also keine entsprechende Vernetzung des Konzeptes des nicht ganzzahligen Wachstumsfaktors mit dem Konzept des ganzzahligen Wachstumsfaktors statt (vgl. Thiel-Schneider 2014).

4. Konsequenzen für das Design – Anschauungsmittel Prozentstreifen

Im dritten Design-Zyklus wird deshalb im Rahmen von Einzel- und Partnerinterviews (n=9) untersucht, ob und wie die oben genannte Vernetzung vom Konzept des nicht ganzzahligen Wachstumsfaktors mit dem Konzept des ganzzahligen Wachstumsfaktors mit Hilfe eines geeigneten Anschauungsmittels vorstellungsorientiert hergestellt werden kann. Als Anschauungsmittel wird der Prozentstreifen (vgl. van den Heuvel-Panhuizen 2003) verwendet, da hier die multiplikative wie auch die proportional new to old-Änderung veranschaulicht werden können. Der Umgang mit diesem Anschauungsmittel in Bezug auf exponentielles Wachstum soll ebenfalls untersucht werden.

In der Lernumgebung, die im Rahmen der Interviews eingesetzt wird, können die Lernenden als Darstellungen Wertetabellen und Prozentstreifen nutzen, um spezifische Vergleiche beider Darstellungen zu ermöglichen. Im Folgenden soll ein Ausschnitt aus einem individuellen Lernpfad einer mathematisch eher leistungsschwachen Schülerin der 10. Klasse eines Gymnasiums exemplarisch zeigen, wie das ‚neue' Anschauungsmittel im Sinne einer Verbindung unterschiedlicher Perspektiven auf exponentielles Wachstum genutzt wird. Der Schülerin gelingt es, die gestellte Aufgabe (Berechnung des Kapitals nach mehreren Jahren) mit Hilfe einer Tabelle zu lösen, wobei sie zuerst pro Schritt einen zum vorherigen Wert proportionalen Wert addiert. Nach weiteren Überlegungen kann sie erklären, wie man das Kapital nach n-Jahren in einem Schritt berechnet und nutzt dabei Vorstellungen zur multiplikativen Änderung. Ihr gelingt es ebenfalls, diese Vorstellungen auf den Prozentstreifen zu übertragen. Die Frage der Interviewerin, was mit der Strecke der Länge 1 passiert, um die Strecke der Länge 1,05 zu erhalten, erklärt die Schülerin folgendermaßen: *„Ja gestreckt auf 1,05, weil man halt auf diese 105 Prozent im Endeffekt kommen muss, weil er ja 5 Prozent Zinsen bekommt."* Im weiteren Verlauf des Interviews benutzt die Schülerin den Begriff „Streckung" als Synonym für die Multiplikation. Sie differenziert zwischen der multiplikativen und proportional new to old-Änderung und erläutert: *„Das ist dann wieder 1 und dann wären die 100, also die Linie zwischen der 0, ist das die Linie (neben dem Prozentstreifen), ja, dann wäre die Linie zwischen der 0 und der 130 wieder dieses 1,3, das heißt wieder, das was wir schon haben wieder halt hochgerechnet, also gestreckt und nicht addiert."* Auf die Frage, wie die Addition, welche die Schülerin erwähnt hat, am Prozentstreifen aussieht, erläutert sie: *„Ja, indem man einfach was draufsetzt, also indem man quasi das hier unten nochmal nimmt und da draufsetzt (S zeigt auf den unteren Abstand und bewegt diesen nach oben am Prozentstreifen) und nicht das, was man schon hat, halt in die Länge zieht. Das wäre halt wieder das, was ich mit dem Dreisatz ausgerechnet hätte, aber das geht ja auch ohne."*

Diese Äußerungen zeigen zum einen, dass die Schülerin die Veranschaulichung der beiden Änderungen am Prozentstreifen nicht nur erklären, sondern auch voneinander abgrenzen kann. Zum anderen kann sie das, was sie am Prozentstreifen veranschaulicht hat, wieder differenziert auf ihre Rechnungen in der Tabelle zurückführen. Auch bei ganzzahligen Wachstumsfaktoren unterstützt der konsequente Darstellungswechsel zwischen Tabelle und Prozentstreifen dabei, tragfähige Vorstellungen zu beiden Änderungen auszubilden. Dieses Beispiel zeigt, dass eine Verbindung unterschiedlicher Perspektiven auf exponentielles Wachstum gelingen kann. Die Studien im dritten Designzyklus sollen darüber Auskunft geben, inwiefern die Lernumgebung die Lernenden beim Vorstellungsaufbau unterstützt. Darauf basierend werden lokale Theorien für den erörterten Lerngegenstand weiterentwickelt.

Literatur

Confrey, J. & Smith, E. (1994). Exponential functions, rates of change, and the multiplicative unit. *Educational Studies in Mathematics, 26,* 135-164.

Ebersbach M., Van Dooren, W., Van Den Noortgate, W., Resing, W. (2008). Understanding linear and exponential growth: Searching for the roots in 6- to 9-years-olds. *Cognitive Development 23*(2)*,* 237-257.

Ellis, A.B., Ozgur, Z., Kulow, T., Williams, C. & Amidon, J. (2012). Quantifying exponential growth: The case of the Jactus. In R. Mayes & L. Hatfield (Eds.), *Quantitative Reasoning and Mathematical Modeling: A driver for STEM integrated education and teaching in context* (pp. 93-112). Laramie, WY: University of Wyoming.

Hußmann, S. (2013). The theory of inferential structured (conceptual) webs of focuses, judgements and situations, Preprint, TU Dortmund.

Hußmann, S., Leuders, T., Prediger, S. & Barzel, B. (2011). Kontexte für sinnstiftendes Mathematiklernen (KOSIMA) – ein fachdidaktisches Forschungs- und Entwicklungsprojekt. *Beiträge zum Mathematikunterricht,* 419-422.

Hußmann, S., Thiele, J., Hinz, R., Prediger, S., Ralle, B. (2013): Gegenstandsorientierte Unterrichtsdesigns entwickeln und erforschen. Fachdidaktische Entwicklungsforschung im Dortmunder Modell. In M. Kormorek & S. Prediger (Hrsg.): *Der lange Weg zum Unterrichtsdesign. Zur Begründung und Umsetzung fachdidaktischer Forschungs- und Entwicklungsprogramme* (S. 25-42). Münster: Waxmann.

Thiel-Schneider, A. (2014): Exponentielles Wachstum verstehen. In Roth, J. & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014*. Münster: WTM Verlag: 1215-1218.

Van den Heuvel-Panhuizen, M. (2003). The didactical use of models in Realistic Mathematics Education: An example from a longitudinal trajectory on percentage. *Educational Studies in Mathematics, 54*(1), 9-35.