Ödön VANCSÓ, Budapest

Reine oder Angewandte Mathematik sollte in der Schule unterrichtet werden?

Diese Frage ist uralt[1], erst bei der Griechen aufgetaucht als die heutige deduktive Mathematik erschien. Sie hat im Unterrichtswesen im XIX. aber wesentlich im XX. Jahrhundert (*nach dem Auftreten* der „New Math" Bewegung) eine Bedeutung gewonnen Humenberger-Reichel (1995) S.14-15.

> „Die Trennung der Mathematik in zwei separate Bereiche – „Reine" und „Angewandte" Mathematik – erfolgte in Ansätzen erst im 19., zum Großteil aber erst im 20. Jahrhundert, eine Entwicklung, die dann noch durch die Erfindung von elektronischen Rechenhilfmitteln fulminant beschleunigt wurde. (s.später bei J. ***Neumann***)"

Später setzt der Zitat folgenderweise fort:

> „Wir verwehren uns dagegen, im Terminus „angewandte Mathematik" einen Gegensatz zur „Reinen Mathematik" zusehen und zu versuchen, die Mathematik in zwei „feindlichen Lager" aufzuspalten."(S. noch im ***Bolyai***'s Fall)

Bolyai und die fünfte Postulate von Euklid

Die Ableitbarkeitsfrage der fünften Postulate wurde im Mittelalter mehrere Jahrhunderte lang (XV-XVIII.) untersucht, bis der „negativen Lösung" von J. Bolyai und N. I. Lobatschewski 1823-1826. Dies war vom Anfang an eine *rein-mathematische* Frage noch aus dem Altertum uns geblieben. Zwei Forscher haben (wieder unabhängig voneinander) fast gleichzeitig solche Texten bei *Aristoteles* gefunden, die die folgende Behauptung „Es ist möglich eine nicht-euklidischen Geometrie" schon bei der Griechen aufgetaucht, unterstützen: s. Freudenthal, H.(1991) und Tóth, I. (1969).

Bolyai's Antwort auf die alte Frage der Parallelengerade

„Ich habe eine neue Welt geschaffen", wie er formulierte in 1823 in einem Brief zu seinem Vater, als er erst bewiesen hat, dass sowie die Postulate wie auch ihre Negation nicht abgeleitet werden kann. Mit „heutigem Sprachgebrauch" hat *János Bolyai* einen Satz in der Geometrie - verstehend unter Geometrie, die aus den „Rest-axiomen" leitbare Geometrie, die von ihm „*Absolute Geometrie*" genannt wurde - gefunden, der *unentscheidbar* ist (s. den berühmten *Gödel's* Satz fast hundert Jahre später). Wir

[1] die Antwort von Euklid einem Schüler, der von ihm gefragt hat, welche Profit aus meinem Studium bei ihnen stammt. Hersch, R. & Davies, P. J. (1981) S.

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

kennen noch eine solche unentscheidbare Behauptung in der Mengentheorie „das Kontinuum-Hypothese” von *Cantor,* G.. Seit dieser Zeit gibt es schon „mehrere Mathematik“. Siehe Hersch, R. (1988), S. 132 bzw.138-139. oder Chaitin, G. (2005) Appendix I S.165-166.

Eine Wendung bei Bolyai's Einstellung

Der Grund dieser Wendung ist *János Bolyai's hoffnungsloser* Kampf gegen den Zeitgenossen, die Anerkennung seiner Theorie zu erreichen. Er hat verstanden, dass diese nur dadurch möglich ist, wenn er eine *wichtige **Anwendung*** seiner Theorie finden könnte. Seine *geniale Idee* die ***Geometrie des Weltraums*** war, aber diese erst später durch *Einstein* gezeigt wurde. Also der „Rein-Mathematiker” Bolyai ist langsam ein *guter* „Angewandte-Mathematiker” geworden (*gut* im Sinn von Freudenthal, s. unten). Mehr über Bolyai ist im Buch von Weszely, T. (2012) zu lesen. Hier erschien auch die auf Deutsch übersetzte Bolyai Sonette von M. Babits.

Drei Strömungen gegen der Bewegung „New Math“ in 70er Jahren

(I) der Realistische Mathematik (Freudenthal, H.)

(II) der Komplexe Mathematikunterricht (Varga, T.)

(III) mehrere Gruppen des *Anwendungsorientierten Mathematikunterrichtes*, siehe *die Vertreter* später

Bevor diese Reformbewegungen kurz diskutiert wären, sei eine Behauptung von Struve, H. (1994) zitiert: „Die große Leistung von Hilbert in seinen „Grundlagen der Geometrie” bestand darin, eine neue Auffassung über Mathematik entwickelt zu haben. Er zeigte, dass der Begriff der *mathematischen Theorie* auch unabhängig von möglichen Anwendungen *sinnvoll* definierbar ist. In der Historie herrschte bis zum Beginn des XX. Jahrhunderts ein anderes Mathematikverständnis vor, und auch in der Schule wird Mathematik anders gelernt.” **Zu (I)** „Das größte Verdienst der Mathematik ist ihre *Flexibilität.* Die Schüler sollen nicht *angewandte Mathematik*, sondern *die Anwendung der Mathematik* lernen. Freudenthal meint also, dass die Schüler lernen sollen, wie man Mathematik anwendet, dass sie selber ihre Modelle bei neuen Situationen entwickeln sollen und dass sie *nicht* auf Modelle zurückgreifen sollen, die schon jemand andere einmal aufgestellt und ausprobiert hat, dass sie die Modelle *nicht* nur einfach *benützen* sollen. Meine Auffassung über die Anwendungen stimmt mit diesem Zitat vollkommen überein. S. Fazit 2. **Zu (II)** Gosztonyi, K. forscht jetzt den MU in Ungarn „vor und mit“ T. Varga, was Thema ihre Dissertation wird. Bis die Veröffentlichung ihrer Ergebnisse kommt nur eine unvollständige Namenliste über solche Mathematiker, die mit dem Unterricht (einbezogen auch die Lehrerausbildung) besonders viel beschäftigt haben: *Hajós, Gy.,* *Kürschák*, *J*., *Péter*, *R*., *Gallai*, T., *Kalmár*, *L*., *Rényi*, *A*., *Surányi*, *J*., *Deák*, *E*.. **Zu (III)** Blum, W. (1996) hat in Klagenfurt in einem Vortrag gefragt: *„Welche Organisationsformen für die Verbindung inner- und außermathematischer Komponenten zweckmäßig sind?“* Seine Antwort lautet so: Das Spektrum reicht von *vollkommener Trennung* bis zu *vollkommener Integration* in einem fachübergreifenden Gesamtunterricht. Bemerkungen zu den zwei Extremen von Blum: (i) Vollkommene Trennung bedeutet allgemein das folgende Verfahren: Zuerst wird ein mathematisches Thema ausführlich behandelt und danach kommt eine oder mehrere Anwendungen dazu. Das ist typisch auch im klassischen Mathematikunterricht vor allem auf höheren Stufen. *Ein Beispiel dafür* war das Leben von *Bolyai J.*. (ii) Vollkommene Integration wird immer wieder propagiert und doch im Unterrichtsalltag so gut wie nie realisiert. Blum behauptet: Es ist günstiger ein sachsystematisch aufgebauter Unterricht mit mehreren „lokalen” und ein paar paradigmatisch ausgewählten „globalen” Anwendungsbeispielen, darunter auch projektartige, wenn möglich im Fächerbund behandelte Unterrichtseinheiten (s. MUED Materialien oder das Beispiel Ampelkreuzung Fischer/Malle (1985) S. 122-141). Blum fordert in 1994 mehrere empirische Untersuchungen. Ich selbst habe in zwei solchen Projekte - die diese Untersuchungen in den Schulalltag in verschiedenen Ländern durchgeführt (DQME-II und LEMA Projekte) - zwischen 2004 und 2010 teilgenommen. Auch meine Erfahrungen unterstützen den Standpunkt von Blum.

Neumann, J. ist mein perfektes Beispiel wie der „Reine” und der „Angewandte” Mathematiker koexistiert. P. Lax sagte: „Seine Genialität *wurzelte in der Mathematik*; seine Denkart war in allen Lebensbereichen völlig durchdrungen von der mathematischen Denkweise, gepaart mit einem enormen Maß an *gesundem Menschenverstand*. Das gilt für ihn als technischen Experten, nicht anders als bei der Analyse politischer Situationen oder der effizienten Ausführung umfangreicher Berechnungen mit Computer.” Die Fortsetzung der Lax’s Meinung lautet so: „Einer der *wichtigsten Charakterzüge* von *Neumann* war seine *leidenschaftliche Verbundenheit mit dem Problemlösen*. Er war vorsätzlich bestrebt, die Wirksamkeit der Mathematik auch *in außermathematischen Gebieten* zur Geltung zu bringen.“ Ich habe im Vortrag durch ein einfaches Spiel gezeigt, wie der Kern der Spieltheorie auch noch in der Schule verstanden werden kann. Das wird aber erst später mit einem Schulexperiment zusammen publiziert.

Fazit 1: Die Wichtigkeit solcher Fragen kennen wir aus „Beliefs” Forschungen, denn wird der Unterricht am stärksten von den Einstellungen der Lehrer/Innen beeinflusst. Deshalb habe ich an unserer Universität einen Kurs für Lehramt Studenten schon am Ende der 90er Jahren angeboten, der sehr erfolgreich bis 2005 - die Einführung der „Bologna-Typ" Lehrerausbildung – weitergelaufen ist. Der Titel war – folgend den Titel des Buches von Currant, R., Robbins, H. – „Was ist die Mathematik überhaupt?". Der Kurs hat noch auch die Gedanken von Hersch, R. (1988) gebraucht. Im Kurs war ein wichtiger Punkt die Reine vs. Angewandte Mathematik und ihre Beziehungen.

Fazit 2: Ich hätte einen verbreiteten *Wahnglaube* – nach dem die meisten Schüler die Mathematik nur brauchen wird, also ist es *genug nur das Gebrauch die Mittel zu erlernen*, die (reine) *Mathematik ist zu vermeiden* – schwächen mögen. Es muss bemerkt werden, dass die wahre, richtige Anwendungen nur von solchen Personen gehofft werden kann, die sich über die Aufbau und die innere Struktur der Mathematik klar sind; unabhängig davon, ob sie sich erst mit reinmathematischen Problemen beschäftigen und später mit ihrer Anwendungen (Bolyai) oder sofort mit komplexen Problemen wie die Spieltheorie oder Quantenmechanik (Neumann).

Fazit 3: Eines der wichtigsten Ziele des Unterrichts ist, die Schüler von der Effizienz der mathematischen Denkweise zu überzeugen. Es gibt *Komponenten der Persönlichkeitsentwicklung*, die *nur durch Mathematik (*oder am leichtesten durch Mathematik) gefördert werden können. Welche sind *die Kompetenzen*, in deren Entwicklung der *Mathematik eine vorrangige Rolle* zukommt? Die Behandlung solcher Fragen sollte als besonders wichtiges Forschungsgebiet in der Mathematikdidaktik angesehen werden.

Literatur

Humenberger, J., Reichel, H.-Ch.(1995): Fundamentale Ideen der Angewandten Mathematik, S. 13-14. (BI Verlag Mannheim-Leipzig-Wien-Zürich)

Freudenthal, H.(1991) Nichteuklidische Geometrie im Altertum? In: Archive for History of Exact Science 43, 1991/92, 189-197.

Tóth, I.: Non Euclidian Geometry before Euklid? Scientific Am. 221/5, 1969, 87-98.

Hersch, R.& Davies, P.J. (1981): The Mathematical Experience Cambridge: Birkhäuser

Hersch, R. (1988): What is Mathematics, really? Vintage, London

Chaitin, G. (2005):Meta Math! Vintage New York

Weszely, T. (2012): János Bolyai - Die ersten 200 Jahre. Birkhäuser 2012 (Springer) http://www.springer.com/birkhauser/history+of+science/book/978-3-0346-0045-3

Struve, H.(1994): Zur Entwicklung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs in Mathematik erfahren und lernen Festschrift für Hans-Joachim Vollrath Klett Verlag 1994, S. 227

Blum, W. (1996): Anwendungsbezüge im Mathematiknterricht - Trends und Perspektiven, Beiträge zum 7. Internationalen Symposium zur Didaktik der Mathematik. Verlag Hölder-Pichler-Tempsky Wien

Fischer, R., Malle, G. (1985): Mensch und Mathematik. BI Verlag, Mannheim