

Frank FEUDEL, Paderborn

## **Die Ableitung als absolute Änderung? – Unterschiedliches Begriffsverständnis in Mathematik und Wirtschaftswissenschaften**

In der Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler spielt der Ableitungsbegriff eine zentrale Rolle, z.B. beim Konzept der Grenzkosten. Das Verständnis des Konzepts in den Wirtschaftswissenschaften unterscheidet sich jedoch vom Verständnis der Ableitung in der Mathematik. In diesem Beitrag wird am Beispiel der Grenzkosten als wesentliche Anwendung der Ableitung in den Wirtschaftswissenschaften analysiert, worin dieser Unterschied besteht und wie in ausgewählten verbreiteten wirtschaftswissenschaftlichen Fachbüchern mit dem Grenzkostenkonzept umgegangen wird. Weiterhin wird dargestellt, was Studierende am Ende eines Kurses „Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler“ für eine verständige Anwendung der Ableitung beim Grenzkostenkonzept wissen sollten. Außerdem wird anhand von Ergebnissen eines Vortests dargestellt, welches Vorwissen die Studienanfänger im Hinblick auf intendierte Wissen mitbringen.

### **Die Problematik der doppelten Definition des Begriffs „Grenzkosten“ in Mathematik und Wirtschaftswissenschaften**

Der Begriff der Grenzkosten wird in Mathematik und Wirtschaftswissenschaften in der Regel unterschiedlich definiert. Deshalb werden im Folgenden zwei verschiedene symbolische Schreibweisen verwendet ( $GK_M$  und  $GK_W$ ). In der Mathematik bzw. Lehrbüchern der Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler werden die Grenzkosten als Ableitung einer Kostenfunktion  $K: [0; \infty[ \rightarrow [0; \infty[$  definiert:

$$GK_M(x) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{K(x+h) - K(x)}{h} \quad (\text{falls er existiert})$$

Die Grenzkosten sind also die Änderungsrate der Kosten. Ihre zugehörige Einheit ist Euro pro Mengeneinheit, wenn die Ausbringungsmenge in Mengeneinheiten und die Kosten in Euro angegeben werden. In der Ökonomie werden die Grenzkosten häufig wie folgt definiert: „Die Grenzkosten sind die Erhöhung der Kosten, die sich aus der Erhöhung des Outputs um eine zusätzliche Einheit ergibt.“ (Pindyck & Rubinfeld, 2005, S.301). Als Formel wäre dies  $GK_W(x) := K(x + 1) - K(x)$ . Die Grenzkosten sind hier eine absolute Änderung (Einheit: Euro) und keine Rate im Sinne von Thompson (1994, S.18). Beide Objekte hängen aber mathematisch miteinander zusammen, nämlich durch die Approximationsformel  $K(x + h) - K(x) \approx K'(x) \cdot h$  für  $h \approx 0$ , die sich aus der Definition der Ableitung als

Grenzwert des Differenzenquotienten ergibt. Da  $h = 1$  klein in der Ökonomie ist, sind die numerischen Werte von  $GK_M(x)$  und  $GK_W(x)$  oft annähernd gleich.

Beide hier genannten Sichtweisen auf die Grenzkosten haben in der Ökonomie ihre Berechtigung. Die Definition der Grenzkosten als Mehrkosten für eine zusätzliche Einheit bildet eine gute anschauliche Basis für das Konzept, weil Mengeneinheiten in der Ökonomie häufig diskret sind. Andererseits ist es aus ökonomischer Sicht praktisch, für die Modellierung wirtschaftswissenschaftlicher Phänomene auf  $[0; \infty)$  definierte, glatte Funktionen zu verwenden, da dann viele zusätzliche mathematische Werkzeuge, wie z.B. der Ableitungsbegriff, verwendet werden können. Bei der Arbeit im mathematischen Modell erweist sich dann die Verwendung der Ableitung als Grenzkosten als praktikabel. Bei der Rückinterpretation in die Realität erfolgt dann im Falle diskreter Einheiten wieder eine Interpretation der Ableitung als Mehrkosten für die nächste Einheit.

### **Umgang mit dem Grenzkostenkonzept in ausgewählten wirtschaftswissenschaftlichen Fachbüchern**

Die Behandlung des Grenzkostenkonzepts in der wirtschaftswissenschaftlichen Fachliteratur ist uneinheitlich. Es werden kurz unterschiedliche Umgangsweisen in 5 ausgewählten, weit verbreiteten Lehrbüchern vorgestellt.

In dem eben zitierten Lehrbuch von Pindyck und Rubinfeld (2005) wird relativ konsistent das Konzept der Grenzkosten als Zusatzkosten für die nächste Einheit verwendet wird (auch bei Berechnungen). Allerdings werden hier die Einheiten von absoluter Änderung und Änderungsrate miteinander vermischt (Verwendung von „Euro pro Mengeneinheit“ in einer Tabelle mit Berechnungen, aber von „Euro“ im Text (S.301-302)).

Es gibt auch Lehrbücher, in denen auf eine Unterscheidung zwischen der Änderungsrate und der absoluten Änderung Wert gelegt wird. Im Lehrbuch „Grundzüge der Mikroökonomik“ von Varian (2007) werden die Grenzkosten als Kostenänderung pro Mengeneinheit eingeführt, wobei eine Unterscheidung zwischen Änderungsrate und absoluter Änderung explizit hervorgehoben wird (S.437).

Daneben gibt es auch wirtschaftswissenschaftliche Lehrbücher, in denen die Grenzkosten als Ableitung  $K'(x)$  definiert werden (Einheit: Geldeinheiten pro Mengeneinheit) und als Mehrkosten für eine zusätzliche Einheit interpretiert werden (Schierenbeck, Wöhle, 2008, S.269-270).

In dem sehr gängigen Lehrbuch „Einführung in die Betriebswirtschaftslehre“ von Wöhe (2011) erfolgt eine Mischung der beiden Sichtweisen ohne

weitere Erläuterungen. Die Grenzkosten werden als Zusatzkosten der letzten Produktionseinheit definiert (S.311). Danach wird passend dazu erklärt, dass sich die Grenzkosten der 33. Produktionseinheit ermitteln lassen, indem man  $K(33) - K(32)$  rechnet. Im folgenden Satz wird dann allerdings ohne weitere Erklärung behauptet, dass die Grenzkosten die Steigung der Kostenfunktion angeben und mit der ersten Ableitung berechnet werden.

Eine Vermischung erfolgt auch in dem Lehrbuch „Mikroökonomie“ von Stiglitz und Walsh (2010). Hier werden die Grenzkosten als Mehrkosten für die nächste Einheit eingeführt (S.51). Die verwendete Einheit ist Dollar. Der Zusammenhang zur Ableitung soll später (S.163) durch zwei nebeneinanderstehende Grafiken verdeutlicht werden, die aber widersprüchlich sind: in die erste sind die Grenzkosten als absolute Kostendifferenz, in die zweite sind sie als Steigung der Tangente an dieselbe Kostenfunktion eingezeichnet, wobei neben der Tangente zusätzlich die Gleichung „Steigung der Kostenfunktion =  $\Delta C / \Delta Q$ “ ( $Q$  ist der Output) zu finden ist.

Insgesamt zeigen die Analysen, dass die Verwendung des Grenzkostenbegriffs in der wirtschaftswissenschaftlichen Fachliteratur nicht einheitlich ist. Oft kommt es sogar zu einer Vermischung von Ableitung und absoluter Änderung ohne ausreichende Erklärungen, was Verwirrung stiften kann. Daher sollte der Zusammenhang zwischen Ableitung und Mehrkosten für eine zusätzliche Einheit in der Mathematikausbildung thematisiert werden.

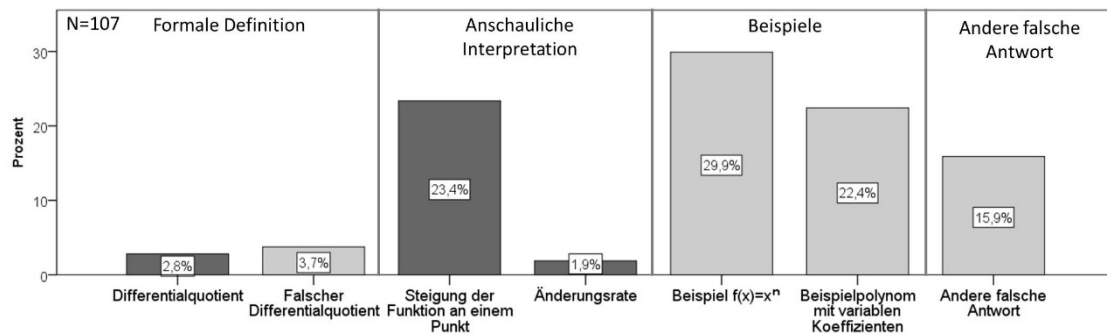
### **Intendiertes Wissen der Studierenden über das Grenzkostenkonzept**

Die Studierenden sollten wissen, dass die Ableitung einer Kostenfunktion  $K$  und die Mehrkosten für eine zusätzliche Einheit mathematisch verschiedene Objekte sind, die aber über die Formel  $K(x + h) - K(x) \approx K'(x) \cdot h$  für  $h \approx 0$  miteinander zusammenhängen. Da  $h = 1$  klein in der Ökonomie ist, sind die numerischen Werte von Ableitung und Zusatzkosten für die nächste Einheit oft annähernd gleich, was eine simultane Verwendung beider Sichtweisen auf die Grenzkosten legitimiert. Um die Näherungsformel begründen zu können, müssen die Studierenden die Verbindung zwischen Ableitung und Differenzenquotient über den Grenzprozess kennen und die Ableitung als Approximation für den Differenzenquotienten verwenden. Insbesondere genügt ein Pseudo-Objekt Verständnis (d.h. kein Bewusstsein über den Grenzprozesses, der zur Ableitung führt) nicht (Zandieh, 2000).

### **Ergebnisse eines Vortests zur Verbindung zwischen der Ableitung und dem Differenzenquotienten**

In einem Vortest der Studienanfänger (Vorkurs 2013) wurden diese aufgefordert, eine Definition der Ableitung einer Funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  an einer

Stelle  $x_0 \in \mathbb{R}$  anzugeben. Es ergaben sich folgende Antwortkategorien:



**Abbildung 1:** Antwortverteilung der Studierenden bei der Aufgabe zur Angabe einer Definition der Ableitung, dunkelgrau=„richtige Antwort“, hellgrau=„falsche Antwort“

Aus den Antworten kann man zwei Resultate ablesen. Zum einen wissen die Studierenden nicht, was eine Definition ausmacht. Sie verwechseln sie mit Beispielen, die einen gewissen Allgemeingrad aufweisen. Zum anderen assoziieren die Studierenden die Ableitung nur selten mit dem Differenzenquotienten, aber auch sehr selten mit der Änderungsrate.

### Ausblick auf weitere empirische Untersuchungen

In einem problemzentrierten Interview sowie durch Analysen von Hausaufgaben und einer Klausuraufgabe soll herausgefunden werden, in wie weit die Studierenden das oben genannte intendierte Wissen am Ende des Kurses „Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler“ an der Universität Paderborn erworben haben.

### Literatur

- Pindyck, R., Rubinfeld, D. (2005). *Mikroökonomie*. 6.Aufl., Pearson
- Schierenbeck H, Wöhle C. (2008): *Grundzüge der Betriebswirtschaftslehre*. 17. Aufl., Oldenbourg
- Stieglitz, J. E., Walsh, C. E. (2010). *Mikroökonomie*. Band 1, 4.Aufl., Oldenbourg
- Thompson, P.W. (1994). The development of the concept of speed and its relationship to concepts of rate. In: Harel, G., Confrey, J.: *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics*, NY: SUNY Press, 179-234
- Tietze J. (2006). *Einführung in die angewandte Wirtschaftsmathematik*. 13.Aufl., Vieweg
- Varian H. (2007). *Grundzüge der Mikroökonomik*. 7.Auflage, Oldenbourg
- Wöhe, G. (2008). *Einführung in die allgemeine Betriebswirtschaftslehre*. 23.Aufl., Vahlen
- Zandieh M. (2000). A Theoretical Framework for Analyzing Student Understanding of the Concept of Derivative. In: Dubinsky, E., Schoenfeld, A., Kaput, J.: *Research in Collegiate Mathematics Education, IV, Issues in Mathematics Education Bd.8.*, RI: American Mathematical Society, 103-127