

Edith LINDENBAUER, Linz

Der Einsatz von dynamischen Arbeitsblättern zur Unterstützung des funktionalen Denkens in der Sekundarstufe 1

In der Literatur werden vielfältige Schwierigkeiten von Schülerinnen und Schülern im Zusammenhang mit funktionalem Denken angeführt. Besonders stechen dabei ein mangelhaft entwickelter Kovariationsaspekt, der Graph-als-Bild Fehler und die sogenannte ‚Illusion of linearity‘ hervor (Clement, 1989; De Bock, Verschaffel & Janssens, 1998; Malle, 2000; Hoffkamp, 2011). Dieses Dissertationsprojekt hat zum Ziel, im Rahmen einer qualitativen Studie zu ermitteln, welchen Einfluss technologiebasierte dynamische Materialien auf die individuellen Vorstellungen von Schülerinnen und Schülern in Bezug auf funktionales Denken haben.

Vollrath (1989, S.6) beschreibt diesen Begriff folgendermaßen: „Funktionales Denken ist eine Denkweise, die typisch für den Umgang mit Funktionen ist“. Malle (2000) formuliert dazu folgende Aspekte funktionalen Denkens:

- **Zuordnungsaspekt:** Jedem Argument x wird genau ein Funktionswert $f(x)$ zugeordnet.
- **Kovariationsaspekt:** Wird das Argument x verändert, so ändert sich der Funktionswert $f(x)$ in einer bestimmten Weise und umgekehrt.

Problemstellung

Für das praktische Arbeiten mit Funktionen ist der Kovariationsaspekt sehr wichtig. Empirische Untersuchungen zeigen jedoch, dass vor allem dieser Aspekt des funktionalen Denkens bei Schülerinnen und Schülern unterentwickelt ist (De Bock, Verschaffel & Janssens, 1998; Malle, 2000; Hoffkamp, 2011).

Dynamische Mathematiksoftware wie GeoGebra eignet sich durch ihre interaktiven Darstellungen, um den Kovariationsaspekt von Funktionen zu betonen, und unterstützt so die Entwicklung des funktionalen Denkens (Hohenwarter, 2006).

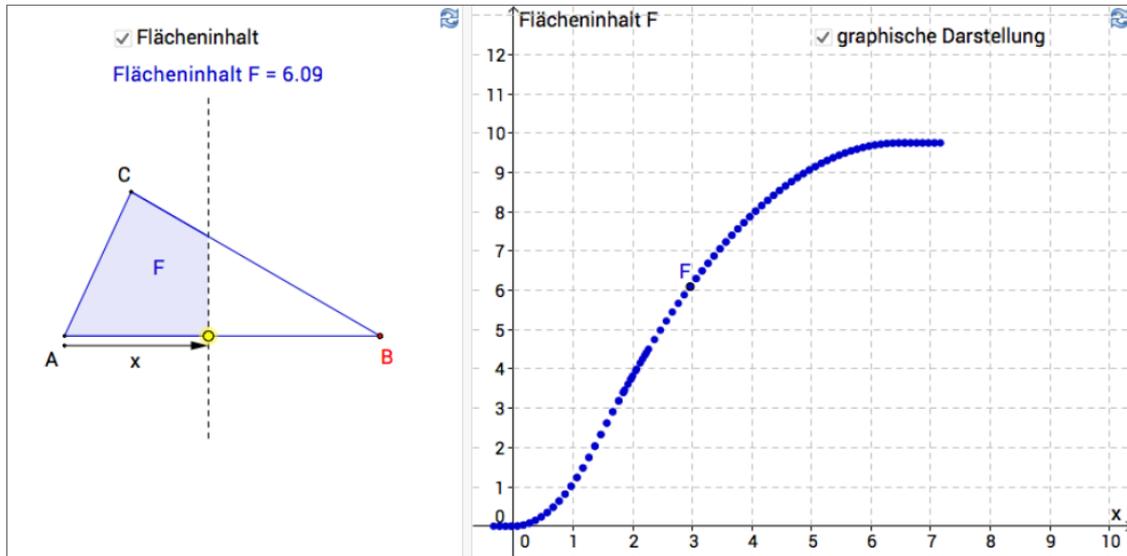
Ein mangelhaft entwickelter Kovariationsaspekt von Funktionen ist unter anderem auch erkennbar am Auftreten des Graph-als-Bild Fehlers (Clement, 1989; Schlöglhofer, 2000; Hoffkamp, 2011). In diesem Fall sehen Schülerinnen und Schüler Funktionsgraphen als photographisches Abbild einer Realsituation. Durch eine bewusste Auseinandersetzung mit solchen Aufgaben soll das Verständnis für die Interpretation von Funktionsgraphen vertieft werden.

Ausgangspunkt für das folgende dynamische Arbeitsblatt ist eine Aufgabe von Schlöglhofer (2000).

Dreieck

< 4. >

Die gestrichelte Linie lässt sich nach links und rechts bewegen. F gibt die Größe der blau unterlegten Fläche an.



Dieses GeoGebra-Applet (siehe <http://ggbtu.be/bNF0RxfE1>) enthält sowohl eine Situationsdarstellung als auch eine Grafikanzeige mit dem zugehörigen Funktionsgraphen. Schülerinnen und Schüler sollen eine Hypothese zum Verlauf des Funktionsgraphen bilden. Dieser gibt den markierten Flächeninhalt links von der strichlierten Linie in Abhängigkeit von x (horizontaler Abstand des hellen Punkts vom Eckpunkt A) an. Der Flächeninhalt wird durch Ziehen des hellen Punkts verändert und der zugehörige Wert durch Anklicken des Kontrollkästchens als Hilfestellung angezeigt. Erst zum Schluss sollen sich Schülerinnen und Schüler den Funktionsgraphen im rechten Fenster anzeigen lassen, um damit ihre Vermutungen über den Verlauf des Graphen zu überprüfen.

Design und Methode

Folgende Aspekte stehen im Zentrum des Forschungsinteresses:

- Welche Vorstellungen haben Schülerinnen und Schüler der Sekundarstufe 1 im Zusammenhang mit funktionalem Denken?
- Wie können dynamische Materialien gestaltet werden, um Schülerinnen und Schüler der Sekundarstufe 1 zu unterstützen, geeignete Vorstellungen zum Thema funktionales Denken zu entwickeln?
- Welchen Einfluss haben dynamische Materialien auf die Vorstellungen von Schülerinnen und Schülern der Sekundarstufe 1 insbesondere

im Hinblick auf das Verständnis des Kovariationsaspekts von funktionalen Abhängigkeiten?

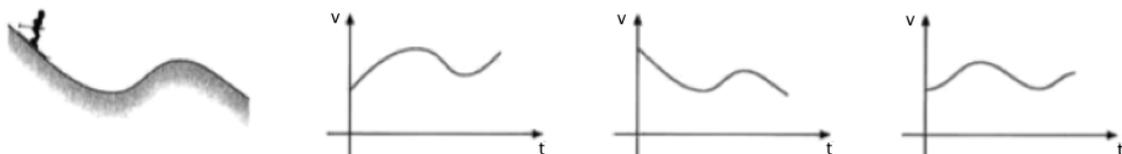
Diese Aspekte werden mit Hilfe einer qualitativen hypothesengenerierenden Studie näher beleuchtet. Dazu werden die entwickelten dynamischen Arbeitsblätter im Unterricht zweier Klassen aus unterschiedlichen Jahrgangsstufen der Sekundarstufe 1 eingesetzt. Die qualitative Auswertung greift auf Methoden der Grounded Theory zurück (Glaser & Strauss, 1998). Eine erste Datenerhebung wurde im Dezember 2014 in einer 8. Schulstufe einer Neuen Mittelschule bereits durchgeführt. Sie gliederte sich in einen mehreren Stufen umfassenden Prozess. Zur Erhebung von Fehlern, die auf typische Fehl- und Präkonzepte von Schülerinnen und Schülern zum Thema funktionales Denken hindeuten, diente ein Diagnosetest. Im Anschluss wurden mit einigen ausgewählten Schülerinnen und Schülern diagnostische Interviews geführt, um einen tieferen Einblick in ihre Vorstellungen zu erhalten (Hunting, 1997). In der Folge setzten sich die Schülerinnen und Schüler in Partnerarbeit für die Dauer von drei Unterrichtseinheiten – angeleitet durch begleitende Aufgabenstellungen – mit verschiedenen dynamischen Arbeitsblättern auseinander. 10 Schülerinnen und Schüler wurden bei ihrer Arbeit mithilfe von Audio-, Video- und Bildschirmaufnahmen aufgezeichnet. Nach dieser Unterrichtssequenz erfolgte ebenfalls ein Diagnosetest und – ausgehend von einer Analyse der Aufzeichnungen und des Tests – diagnostische Interviews mit einigen Schülerinnen und Schülern.

Eine genauere qualitative Analyse der Beobachtungsdaten und Interviewaufzeichnungen soll einen Einblick in den Einfluss von dynamischen Materialien auf die Vorstellungen der Schülerinnen und Schüler geben. Das Ziel besteht darin, Hypothesen zu dieser Fragestellung zu ermitteln.

Erste Ergebnisse

Im ersten Diagnosetest wurde unter anderem folgende Aufgabe gestellt:

„Ein Skifahrer fährt eine Piste hinunter. Das Diagramm zeigt seine Geschwindigkeit v im Verlauf der Zeit t . Welches der drei Diagramme ist richtig?“ (Schlöglhofer, 2000, S. 17)



Insbesondere die fehlerhaften Antworten der Schülerinnen und Schüler sind interessant. Exemplarisch hier zwei Antworten:

- **Schüler 1:** „Ich nehme das Zweite, weil am Bild die Piste auch so ist wie sie am Diagramm dargestellt ist.“
- **Schülerin 2:** „Beim direkten Hinunterfahren ist der Skifahrer schneller unten – wo der nächste Hügel beginnt, wird er langsamer, und wenn er da ist, muss er wieder hinunterfahren, was bedeutet, dass er wieder schneller wird.“

Interessant sind hier die Begründungen: während der Schüler direkt einen Graph-als-Bild Fehler begeht, beschreibt die Schülerin den Geschwindigkeitsverlauf verbal richtig, der Transfer auf die Darstellung als Funktionsgraph hingegen erfolgt nicht korrekt. Die gleiche falsche Lösung deutet hier auf verschieden ausgeprägte (Fehl-)Vorstellungen der beiden Kinder hin.

Literatur

- Clement, J. (1989). The concept of variation and misconceptions in cartesian graphing. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 11(1-2), 77–87.
- De Bock, D., Verschaffel, L. & Janssens, D. (1998). The predominance of the linear model in secondary school students' solutions of word problems involving length and area of similar plane figures. *Educational Studies in Mathematics*, 35(1), 65–83.
- Glaser, B.G. & Strauss, A.L. (1998). *Grounded Theory – Strategien qualitativer Forschung*. Verlag Hans Huber, Bern.
- Hoffkamp, A. (2011). *Entwicklung qualitativ-inhaltlicher Vorstellungen zu Konzepten der Analysis durch den Einsatz interaktiver Visualisierungen: Gestaltungsprinzipien und empirische Ergebnisse*. Unveröffentlichte Dissertation, Technische Universität Berlin.
- Hohenwarter, M. (2006). Funktionales Denken mit der dynamischen Mathematiksoftware GeoGebra. In R. Grothmann (Hrsg.), *Eichstätter Kolloquium zur Didaktik der Mathematik*. Katholische Universität Eichstätt-Ingolstadt, Deutschland.
- Hunting, R.P. (1997). Clinical Interview Methods in Mathematics Education Research and Practice. *Journal of Mathematical Behavior*, 16(2), 145–165.
- Malle, G. (2000). Zwei Aspekte von Funktionen: Zuordnung und Kovariation. *Mathematik lehren*, 103, 8–11.
- Schlöglhofer, F. (2000). Vom Foto-Graph zum Funktions-Graph. *Mathematik lehren*, 103, 16–17.
- Vollrath, H.-J. (1989). Funktionales Denken. *Journal für Mathematikdidaktik*, 10, 3–37.