

Susanne WÖLLER, Leipzig

Mathematische Begriffs- und Vorstellungsbildung am Übergang von der Grundschule zur Sekundarstufe – eine theoretische Annäherung

In dem Kinderbuch „Fish is Fish“ von Leo Lionni (erschienen bei Dragonfly Books, 1974) ist eine Passage zu finden, in der Fisch und Frosch aufeinandertreffen und der Frosch dem Fisch von seinen Erkundungen aus der Welt berichtet: “Cows,” said the frog. “Cows! They have four legs, horns, eat grass, and carry pink bags of milk.” Was daraufhin in den Illustrationen des Buches sichtbar wird, ist, dass sich der Fisch eine ganz eigene, für uns befremdliche, Vorstellung von dem Begriff *Kuh* macht. In dieser konstruierten Vorstellung gleicht die *Kuh* einer Fantasiefigur, die einem Fisch ähnelt, dabei aber die vom Frosch aufgezählten Eigenschaften besitzt.

Übertragen auf den kindlichen Begriffserwerb verdeutlicht dieses fiktive Beispiel, dass unsere Vorstellung von Begriffen und Begriffserwerb nicht zwingend mit dem kindlichen Prozess der Ausbildung von Vorstellungen zu einem Begriff korrelieren muss. Im Kontext schulischen Lernens wird dieses Problem besonders deutlich, wenn der Blick auf die kindliche Begriffsbildung am Übergang von der Grundschule zur Sekundarstufe gerichtet wird.




Betrachtet man Unterrichtsangebote, die in besonderer Weise auf den mathematischen Begriffserwerb ausgerichtet sind, fallen in der Praxis erhebliche Unterschiede zwischen Aktivitäten in der Grundschule und Angeboten für den Mathematikunterricht am Beginn der Sekundarstufe auf: In der Grundschule wird offenkundig besonderer Wert darauf gelegt, Kinder z. B. über Materialhandlungen oder das Erstellen von Eigenproduktionen im Sinne des konstruktiven Begriffserwerbs zu unterstützen (vgl. u. a. Franke & Reinhold, 2015). Im Gegensatz dazu ist erkennbar, dass das Begriffslernen in der Sekundarstufe merklich anderen Regeln folgt und stärker gezielt Prozesse des Spezifizierens oder Abstrahierens anspricht, mit Definitionen arbeitet und symbolische Darstellungen einbezieht (vgl. u. a. Weigand, 2014).

Gleichzeitig, als Folge des spezifischen Begriffslernens, beruhen Vorstellungen, die Schüler und Schülerinnen im Laufe des Begriffserwerbs aufbauen, in der Grundschule überwiegend auf gegenständlichen oder bildlichen Repräsentationen (vgl. Vom Hofe, 1996, S. 33; Floer, 1995, S. 20; Lorenz, 2011, S. 50). Andererseits gründen Vorstellungen, die in der Sekundarstufe aufgebaut werden, überwiegend auf bildlichen Repräsentationen abstrakter mathematischer Darstellungen (vgl. Vom Hofe, 1996, S. 34;

Dawydow, 1972, S. 242). Dieser Übergang, und die damit einhergehende Veränderung des Vorstellungskonzepts beim Begriffslernen, soll in einer eigenen Studie in den Blick genommen werden.

Facetten des Begriffserwerbs und des Begriffsverständnisses

Doch zunächst soll hier eine theoretische Annäherung an die Problematik erfolgen. Ausgangspunkt ist die Frage, wann Schüler und Schülerinnen in summa einen Begriff *gelernt* haben. Zum Begriffsverständnis, also dem *Gelernten*, gehört neben dem Kennen der Begriffsbezeichnung und -definition ebenso das Beherrschen charakteristischer Eigenschaften dieses Begriffes (Vollrath, 1984, S. 9; Weigand, 2014, S. 99). Versteht man die Grundfertigkeiten beim Begriffserwerb analog zum Van-Hiele-Modell (vgl. Van Hiele, 1964) bzgl. der Entwicklung geometrischen Denkens, lassen sich unterschiedliche Denkebenen konstatieren. Anschließend an die oben genannten Aspekte können darauf aufbauende Gesichtspunkte angebracht werden, wie die Adjunktion von Beispielen und Gegenbeispielen zum besagten Begriff, die Einbettung des Begriffes in ein Beziehungsgeflecht (Ober- und Unterbegriffe) und schließlich die Verwendbarkeit des Begriffes zum Beschreiben von Sachverhalten und Lösen von Problemen (Vollrath, 1984, S. 10; Weigand, 2014, S. 99). Letztendlich ist es notwendig, dass Schüler und Schülerinnen Einsichten in die innere Struktur des Begriffes (Aebli, 1997, S. 269), losgelöst von der besonderen Situation, in welcher der Begriff erarbeitet wurde, erlangen.

Ausgehend von diesen Betrachtungen, lässt sich im Mathematikunterricht, sowohl in der Grundschule, als auch in der Sekundarstufe (und teilweise noch in der Lehrer- und Lehrerinnenausbildung) ein Phänomen beobachten, welches aufzeigt, dass mathematische Begriffe nur schwerlich in ihrer inneren Struktur durchdrungen werden. Dörfler weist diesbezüglich darauf hin, dass ein mathematischer Begriff oftmals mit seiner prototypischen Darstellung identifiziert wird (Dörfler, 1988, S. 110). So findet eine Gleichsetzung zwischen dem Begriff (z. B. *Viereck*) und allen mathematischen Objekten, die ihm zuzuordnen sind, statt (z. B.  ,  , ). Da Begriffe allerdings „abstrakte, ideale Objekte“ bzw. „Objekte des Denkens“ (Dörfler, 1988, S. 110) darstellen und vielmehr theoretischer Natur sind, als dass sie empirische Gegenstände oder Dinge repräsentieren (vgl. Schülke & Söbbeke, 2010, S. 18), kann es vermeintlich zu Problemen beim Begriffslernen und der Anwendung des Begriffes im Mathematikunterricht kommen. Nun kann allerdings nicht geschlussfolgert werden, dass einer Vergegenständlichung im Mathematikunterricht entgegenzuwirken ist (Dörfler, 1988, S. 112). Vielmehr ist der Akt des Findens von Prototypen (z. B. wie oben das Nutzen von Zeichnungen von Vertretern des Begriffes

Viereck) ein unentbehrlicher Schritt auf dem Weg zum verständigen Begriffslernen. Die Zeichnung oder das Objekt veranschaulicht den mathematischen Begriff und hilft somit tragfähige Vorstellungen auszubilden (Dörfler, 1988, S. 113; Büchter & Haug, 2013, S. 4).

Zurückkommend auf die eingangs beschriebene Problematik, kann festgestellt werden, dass die in der Grundschule zu mathematischen Inhalten aufgebauten primären Grundvorstellungen eher auf gegenständlichen Handlungserfahrungen (eingebettet in einen situativen Kontext) beruhen und im Laufe der Schulzeit durch sekundäre Grundvorstellungen ergänzt oder teilweise sogar ersetzt werden (Vom Hofe & Hattermann, 2014, S. 2). Jenes Geflecht von Beziehungen und dessen stete Anpassung an die situativen Gegebenheiten bilden das Grundverständnis eines mathematischen Begriffes (Vom Hofe, 1996; Vom Hofe, 2003).

Offene Fragen und exploratives Vorhaben

Vor diesem Hintergrund stellt sich die Frage, wie sich elementares Begriffsverständnis bei Schülern und Schülerinnen der Klassenstufen 4, 5 und 6 zeigt und welche interindividuellen Unterschiede sich feststellen lassen. Ebenso soll es ein Anliegen sein, ausfindig zu machen, ob Schüler und Schülerinnen flexibel Begriffe und deren Eigenschaften nutzen können, um ihre Vorstellungen auch auf andere Vertreter der Begriffsklasse übertragbar zu machen (vgl. das Problem der „Disjunktion verschiedener Unterklassen von Begriffen zu einer Klasse“, Weigand, 2014, S. 108). Die eigenen Vorhaben dazu konzentrieren sich auf den Erwerb geometrischer Begriffe (*Quader* als Objektbegriff, *Fläche* als Eigenschaftsbegriff und *ist rechtwinklig zu* als Relationsbegriff).

Perspektivisch ist auch eine ergänzende Längsschnittuntersuchung angedacht. Sofern sich auf der Basis dieser individualdiagnostisch gewonnenen Erkenntnisse typische Entwicklungsverläufe abzeichnen, können die in der Grundschule und Sekundarstufe unterbreiteten (unterschiedlichen) Zugänge zum Begriffslernen kritisch reflektiert werden.

Da geometrische Vorstellungen u. a. durch Handlungen an konkreten Gegenständen ausgebildet werden (Weigand, 2014, S. 103; Maier, 1999, S. 13), erscheint es naheliegend Begriffsverständnis und damit aufgebaute Vorstellungen über bauende und legende Handlungen an haptischen Gegenständen mittels Videoaufzeichnung zu erheben. Zur Erschließung dessen soll sich der konkrete Fragenkatalog an Vollraths Grundfertigkeiten beim Begriffslernen orientieren (Vollrath, 1984). Für die Auswertung der Aufzeichnungen werden kognitionstheoretische Modelle wie die Niveaustheorie zur Denkentwicklung nach Van Hiele (u. a. Van Hiele, 1964) her-

angezogen. Ausgehend von den Beobachtungen und Erkenntnissen könnte eine anschließende Anpassung des Fragenkataloges für weitere Erhebungen erfolgen, die dann eventuell weiterführende Ansätze ermöglichen.

Literatur

- Aebli, H. (1997). *Zwölf Grundformen des Lehrens*. 9. Aufl. Stuttgart: Klett-Cotta.
- Büchter, A. & Haug, R. (2013). Lernen mit Material. Anker setzen beim Aufbau mathematischer Grundvorstellungen. *Mathematik lehren*, 30/176, S. 2-7.
- Dawydow, W. W. (1972). Über das Verhältnis zwischen abstrakten und konkreten Kenntnissen im Unterricht. In J. Lompscher (Hrsg.), *Probleme der Ausbildung geistiger Handlungen* (S. 241-259). Berlin: Volk und Wissen.
- Dörfler, W. (1988). Rolle und Mittel von Vergegenständlichung in der Mathematik. *Beiträge zum Mathematikunterricht*, 22 (S. 110-113). Hildesheim: Franzbecker.
- Floer, J. (1995). Wie kommt das Rechnen in den Kopf? *Die Grundschulzeitschrift*, 82, S. 20-23.
- Franke, M. & Reinhold, S. (2015). *Didaktik der Geometrie in der Grundschule*. 3. Aufl. Heidelberg: Spektrum Akad. Verlag.
- Lionni, L. (1974). *Fish is Fish*. New York: Dragonfly Books.
- Lorenz, J. H. (2011). Die Macht der Materialien (?). In A. S. Steinweg (Hrsg.), *Medien und Materialien. Tagungsband des AK Grundschule in der GDM 2011* (S. 39-54). Bamberg: UBP.
- Maier, P. H. (1999). *Räumliches Vorstellungsvermögen*. Donauwörth: Auer.
- Schülke, C. & Söbbeke, E. (2010). Die Entwicklung mathematischer Begriffe im Unterricht. In C. Böttinger et al. (Hrsg.), *Mathematik im Denken der Kinder* (S. 18-47). Seelze: Kallmeyer und Klett.
- Van Hiele, P. M. (1964). Piagets Beitrag zu unserer Einsicht in die kindliche Zahlbegriffsentwicklung. In H. Abel et al. (Hrsg.), *Rechenunterricht und Zahlbegriff – Die Entwicklung des kindlichen Zahlbegriffs und ihre Bedeutung für den Rechenunterricht* (S. 105-131). Braunschweig: Westermann.
- Vollrath, H.-J. (1984). *Methodik des Begriffslehrens im Mathematikunterricht*. Stuttgart: Klett.
- Vom Hofe, R. (1996). Arithmetische Grundvorstellungen und funktionales Denken. *mathematica didactica*, 19, Bd. 2, S. 28-42.
- Vom Hofe, R. (2003). Grundbildung durch Grundvorstellung. *mathematik lehren*, 118, S. 4-8.
- Vom Hofe, R. & Hattermann, M. (2014). Zugänge zu negativen Zahlen. *mathematik lehren*, 183, S. 2-7.
- Weigand, H.-G. (2014). Begriffslernen und Begriffslehren. In H.-G. Weigand et al. (Hrsg.), *Didaktik der Geometrie für die Sekundarstufe I* (S. 99-122). 2. Aufl. Berlin, Heidelberg: Springer Spektrum.