

# **Bestimmung der Kühlgasverteilung in Turbogeneratoren durch Kombination der Finite-Elemente-Berechnung und der Netzwerkanalyse**

Der Fakultät für Elektrotechnik und Informationstechnik  
der Technischen Universität Dortmund vorgelegt

**DISSERTATION**

zur Erlangung des akademischen Grades  
Doktor der Ingenieurwissenschaften

von  
Dipl.-Ing. Kaining Zhao

Dortmund

---

Hauptreferent: Prof. Prof. Dr.-Ing. Dr.-Ing. habil. Stefan Kulig  
Korreferent: Prof. Prof. h.c. Dr.-Ing. habil. Christian Rehtanz

Tag der mündlichen Prüfung: 06. 07. 2016

# Zusammenfassung

Der Bedarf an elektrischer Energie, insbesondere in der dritten Welt, nimmt ständig zu. Um diesen Bedarf zu decken, bedarf es neuer leistungsstarker und gleichzeitig bezahlbarer Kraftwerke mit hohen Wirkungsgraden. Die Kosten der eingesetzten Kraftwerksgeneratoren lassen sich deutlich durch die Steigerung der Leistungsdichten senken. Dies kann nur erreicht werden, wenn die bei der Energieumwandlung entstehenden Verluste wirkungsvoll abgeführt werden. Somit hat die Problematik der effektiven Kühlung bei der Auslegung von elektrischen Maschinen großer Leistungen einen sehr hohen Stellenwert.

Die folgende Arbeit befasst sich mit den Volumenströmen des Kühlgasmediums in Kraftwerksgeneratoren, die durch die speziell hierfür installierten Gebläse erzwungen werden.

Es wird ein neues Verfahren zur Berechnung der Volumenstromverteilung des Kühlgases in elektrischen Maschinen großer Leistungen entwickelt. Die beiden bisher getrennt angewandten Berechnungsarten, nämlich die Netzwerkanalyse mit den Wärmequellen sowie die FE-Methode, werden miteinander so verknüpft, dass die jeweiligen Vorteile ausgenutzt und die Nachteile weitgehend reduziert werden. Auf diese Weise werden eine verbesserte Genauigkeit und leichtere Handhabung bei der Berechnung der Kühlgasverteilung erreicht.

Das Verfahren der klassischen Netzwerktheorie wird beibehalten, jedoch werden für die wichtigsten Komponenten, wie Nutgrundkanäle, Stator und Rotorwickelköpfe mit Hilfe eines dreidimensionalen FE-Programms die Widerstandskennlinien bestimmt und in das klassische Strömungsnetzwerk eingebunden. Die Auflösung des Netzwerks erfolgt mit Hilfe des kommerziellen Programms *Flowmaster*, das speziell für die Analyse von Wärmenetzwerken entwickelt wurde.

Die durchgeführte Simulation wurde für einen realen Generator durchgeführt, für den auch im Prüffeld die Volumenströme und Druckabfälle an allen signifikanten Maschinenorten gemessen wurden. Die Berechnungen wurden sowohl für das „klassische“ als auch für das erweiterte Netzwerkmodell durchgeführt und miteinander verglichen.

Hierbei hat sich gezeigt, dass durch Einsatz des neuentwickelten kombinierten Verfahrens gerade in den durch die Verluste stark beanspruchten Bereichen, wie z. B. den Wickelköpfen der Maschine oder den Nutgrundkanälen, eine deutliche Verbesserung der Berechnungsgenauigkeit von Volumenströmen (bis zu 20 %) erreicht werden konnte. Für die Auslegung der Maschinen ergeben sich hierdurch wichtige Erkenntnisse, da gerade diese Bereiche bei aktuellen Konstruktionen die angestrebte Leistungserhöhung begrenzen.

Ein weiterer Vorteil des neuen Verfahrens liegt darin, dass durch die weitgehend formalisierte Erstellung des Modells der Zeitaufwand für die Durchführung der Simulation deutlich verkürzt wird. Hinzu kommt, dass die ermittelten Widerstandskennlinien nahezu linearen Charakter aufweisen und in bezogener Darstellung für andere Maschinentypen übernommen werden können.

---

# Inhaltsverzeichnis

|  |           |
|--|-----------|
| Zusammenfassung .....  | I         |
| Formelzeichen- und Abkürzungsverzeichnis.....                                  | IV        |
| <b>Kapitel 1 Einleitung .....</b>  | <b>1</b>  |
| 1.1 Steigerung der Einheitsleistung durch Verbesserung der Kühlung .....       | 1         |
| 1.2 Entwurf des Kühlsystems .....  | 7         |
| 1.3 Ausgewählte Publikationen .....  | 10        |
| 1.3.1 Modellierung mit Hilfe der Wärmequellennetzwerke .....                   | 10        |
| 1.3.2 Bestimmung der Wärmeverluste .....                                       | 12        |
| 1.3.3 Einsatz der FE-Methode zur Bestimmung der Temperaturverteilung .....     | 16        |
| <b>Kapitel 2 Ziel der Arbeit.....</b>  | <b>19</b> |
| <b>Kapitel 3 Theoretische Grundlagen .....</b>                                 | <b>20</b> |
| 3.1 Die Hauptsätze der Thermodynamik .....                                     | 20        |
| 3.2 Wärmeleitung .....   | 21        |
| 3.3 Konvektion.....  | 24        |
| 3.3.1 Die Strömungsgeschwindigkeit und der Massestrom .....                    | 24        |
| 3.3.2 Strömungsformen .....  | 25        |
| 3.3.3 Strömungswiderstand.....   | 29        |
| 3.3.4 Innere Strömung.....   | 31        |
| 3.3.5 Turbulente Strömung im Rohr.....   | 35        |
| 3.3.6 FEM zur Lösung von Navier-Stokes-Gleichungen .....                       | 38        |
| 3.4 Zusammenfassung des Kapitels .....   | 48        |
| <b>Kapitel 4 Kühlgasverteilung im Generator.....</b>                           | <b>49</b> |
| 4.1 Generatoren mit indirekter Luftkühlung.....                                | 49        |
| 4.2 Generator mit direkter Wasserstoffkühlung .....                            | 52        |
| 4.3 Generator mit direkter Wasserkühlung .....                                 | 54        |
| <b>Kapitel 5 Anwendung der Netzwerktheorie zur Analyse von</b>                 |           |
| <b>Strömungsnetzwerken.....</b>  | <b>57</b> |
| 5.1 Klassische Netzwerktheorie.....  | 59        |
| 5.2 Vorgehensweise bei der Erstellung eines Strömungsnetzwerks.....            | 62        |
| 5.3 Die Teilmatrizen im Strömungsnetzwerk .....                                | 64        |
| 5.4 Lösungsverfahren für nichtlineare Netzwerkgleichungen .....                | 67        |
| <b>Kapitel 6 Berechnung der Volumenströme in einem 100-MVA-Generator .....</b> | <b>78</b> |
| 6.1 Die wichtigsten Komponenten des Kühlkreises .....                          | 79        |
| 6.2 Programm <i>Flowmaster</i> zur Analyse von Strömungsnetzwerken .....       | 81        |
| 6.3 Erweitertes Netzwerkmodell des Generators.....                             | 83        |

---

|   |            |
|---|------------|
| <b>Kapitel 7 Einsatz der FE-Methode zur Bestimmung von Widerstands-</b>         |            |
| <b>kennlinien .....</b>   | <b>87</b>  |
| <b>7.1 Kühlkanäle und -bohrungen im Läufer .....</b>                            | <b>87</b>  |
| <b>7.1.1 Gasführung im Läufer .....</b>   | <b>87</b>  |
| <b>7.1.2 FE-Modell des Kühlkanals im Rotorballen.....</b>                       | <b>90</b>  |
| <b>7.1.3 FE-Simulation mit dem Programm <i>Fluent</i> .....</b>                 | <b>91</b>  |
| <b>7.1.4 Bestimmung der Koeffizienten für die Ersatzwiderstände.....</b>        | <b>95</b>  |
| <b>7.2 Ständerwickelkopf.....</b>   | <b>97</b>  |
| <b>7.2.1 FE-Modell des Ständerwickelkopfes.....</b>                             | <b>98</b>  |
| <b>7.2.2 Widerstandskennlinie des Ständerwickelkopfes.....</b>                  | <b>99</b>  |
| <b>7.3 Rotorwickelkopf .....</b>  | <b>103</b> |
| <b>7.3.1 FE-Modell des Läuferwickelkopfes.....</b>                              | <b>106</b> |
| <b>7.3.2 Widerstandskennlinie des Rotorwickelkopfes .....</b>                   | <b>107</b> |
| <b>7.3.3 Widerstandskennlinien für den Rotorwickelkopf .....</b>                | <b>111</b> |
| <b>Kapitel 8 Einfluss der detaillierten Modellierung auf die Verteilung der</b> |            |
| <b>Volumenströme .....</b>  | <b>114</b> |
| <b>8.1 Nutgrundkanal.....</b>   | <b>115</b> |
| <b>8.2 Ständerwickelkopf.....</b>   | <b>117</b> |
| <b>8.3 Läuferwickelkopf.....</b>  | <b>119</b> |
| <b>Kapitel 9 Abschließende Bewertung.....</b>                                   | <b>121</b> |
| <b>Kapitel 10 Ausblick .....</b>  | <b>122</b> |
| <b>Literaturverzeichnis .....</b>   | <b>123</b> |
| <b>Lebenslauf.....</b>  | <b>126</b> |

---

# Formelzeichen- und Abkürzungsverzeichnis<sup>1</sup>

| Abkürzung     | Einheit          | Bezeichnung   |
|---------------|------------------|---|
| $A$           | $m^2$            | Fläche  |
| $[A]$         |                  | Koeffizient Matrix  |
| $a$           | $m^2/s$          | Temperaturleitfähigkeit des eingesetzten Stoffs             |
| $[B]$         |                  | Maschenmatrix   |
| $[B_A]$       |                  | Teilmatrix der Maschenmatrix, Äste                          |
| $b_j$         |                  | Elemente der Maschenmatrix                                  |
| $c$           | $m/s$            | Strömungsgeschwindigkeit                                    |
| $c$           | $J/(kg \cdot K)$ | Wärmekapazität  |
| $c_{avg}$     | $m/s$            | Durchschnittliche Geschwindigkeit                           |
| $c_{max}$     | $m/s$            | Maximale Strömungsgeschwindigkeit                           |
| $c_p$         | $J/(kg \cdot K)$ | Spezifische Wärmekapazität für konstantes Volumen $V$       |
| $c_v$         | $J/(kg \cdot K)$ | Spezifische Wärmekapazität für konstanten Druck $P$         |
| $D$           | $m$              | Durchmesser   |
| $D_{gl}$      | $m$              | Ersatzdurchmesser für einen nicht kreisförmigen Querschnitt |
| $[E_{\cdot}]$ |                  | Einheitsmatrix  |
| $dF_G$        | $N$              | Auf die Teilchen wirkende Schwerkraft                       |
| $d_s$         | $m$              | Distanz, Entfernung   |
| $(F_i)$       | $N$              | Kraftvektor   |
| $F_p$         | $N$              | Druckkräfte   |
| $F_t$         | $N$              | Komponente der Gewichtskraft                                |
| $F_w$         | $N$              | Widerstandskraft  |
| $f$           | $N$              | Volumenkraft - (Massenkraft)                                |

---

<sup>1</sup> Sortiert nach Reihenfolge des lateinischen und griechischen Alphabetsystems

---

|                       |         |   |
|-----------------------|---------|---|
| $f(v)$                |         | Beliebige Funktionen  |
| $f'(V^k)$             |         | Tangente der Funktion   |
| $g$                   | $m/s^2$ | Erdbeschleunigung   |
| $(H_p)_i$             | J       | Die durch eine Pumpe verursachten Energieverluste innerhalb eines Kreises |
| $h$                   | J       | Enthalpie   |
| $h_p$                 | m       | Höhenunterschied  |
| $h_i$                 | J       | Der kinematischen Verluste  |
| $h_{1 \rightarrow 2}$ | J       | Summe aller Verluste  |
| $i, j$                |         | Indizes   |
| $(I_A)$               | A       | Vektor der Astströme  |
| $(I_S)$               | A       | Vektor der Sehnenströme   |
| $[J]$                 |         | Jacobi-Matrix   |
| $k$                   |         | Anzahl der Knoten   |
| $[K_{ij}]$            |         | Diffusionsmatrix  |
| $[K_{se}(u, v)]$      |         | Stabilisierungsmatrix   |
| $k_s$                 |         | Äquivalente Sandrauigkeit   |
| $L$                   | m       | Charakteristische Länge der Umströmung                                    |
| $L$                   | m       | Länge des Rohres  |
| $L_{(1,2,3)}$         | $m^2$   | Flächenkoordinaten der Dreiecke   |
| $L_t$                 | m       | Eine turbulente freie Weglänge  |
| $[M]$                 |         | Masse Matrix  |
| $[M_p]$               |         | Masse Matrix (Pressure Term)  |
| $\dot{m}$             | kg/s    | Massenstrom   |
| $\dot{m}_{ist}$       | kg/s    | Zugehörige Massenströme   |
| $\dot{m}_{neu}$       | kg/s    | Verbesserter Massenstrom  |
| $N_u$                 |         | Nußelt-Zahl   |

---

|                 |                       |   |
|-----------------|-----------------------|---|
| $n$             |                       | Normalrichtung                            |
| $P$             | Pa                    | Luftdruck                                 |
| $P_r$           |                       | Prandtl-Zahl                              |
| $Q$             | J                     | Wärme                                     |
| $\dot{Q}$       | J/s                   | Wärmestrom                                |
| $Q$             |                       | Gewichtungsfunktion                       |
| $[Q_i]$         |                       | Gradient-Matrix                           |
| $\dot{q}_s$     | J/(m <sup>2</sup> ·s) | Wärmestromdichte                          |
| $R$             | N·s/m <sup>5</sup>    | Strömungswiderstand                       |
| $Re$            |                       | Reynolds-Zahl                             |
| $r$             | m                     | Radius                                    |
| $r_a$           | m                     | Äußerer Radius des Wickelkopfs            |
| $r_i$           | m                     | Innerer Radius des Wickelkopfs            |
| $S$             | m <sup>2</sup>        | Fläche eines Dreieckelementes             |
| $s$             | m                     | Distanz                                   |
| $T$             | c°                    | Temperatur                                |
| $T_w$           | c°                    | Wandtemperatur                            |
| $T_\infty$      | c°                    | Umgebungstemperatur                       |
| $t$             | s                     | Zeit                                      |
| $U$             | J                     | Energie                                   |
| $u$             | m/s                   | Strömungsgeschwindigkeit in x- Komponente |
| $(U)$           | m/s                   | Strömungsgeschwindigkeitsvektor           |
| $(U_s)$         |                       | Vektor der gesteuerten Quelle             |
| $(U_{q,const})$ | Pa                    | Vektor der Druckabfälle                   |
| $V$             | m <sup>3</sup>        | Volumen                                   |
| $\dot{V}$       | m <sup>3</sup> /s     | Volumenstrom                              |
| $(V^{(k)})$     |                       | Lösungsvektor                             |



---

|                   |              |   |
|-------------------|--------------|---|
| $(V^{(0)})$       |              | Anfangsvektor   |
| $(\dot{V}_A^i)$   | $m^3/s$      | Volumenströme in den Ästen                            |
| $(\dot{V}_s^i)$   | $m^3/s$      | Volumenströme in den Sehnen                           |
| $[V_u]$           |              | Steuerungsmatrix                                      |
| $v$               | $m/s$        | Strömungsgeschwindigkeit in y -Komponente             |
| $W$               |              | Gewichtungsfunktion                                   |
| $W_{1,2,3}$       |              | Differentiationen der Komponenten                     |
| $w$               | $m/s$        | Strömungsgeschwindigkeit in z- Komponente             |
| $x$               | $m$          | Dicke   |
| $x_i$             |              | Kartesische Koordinaten                               |
| $Y_{v12}$         | $J$          | Energiegefälle  |
| $y_i$             |              | Kartesische Koordinaten                               |
| $Z$               | $m$          | Höhe  |
| $[Z]$             |              | Zweigimpedanzmatrix                                   |
| $[Z_M]$           |              | Die Maschenwiderstandmatrix                           |
| $[Z_V]$           |              | Steuerungsmatrix                                      |
| $z$               |              | Anzahl der Zweige                                     |
| $z_i$             |              | Kartesische Koordinate                                |
| $\alpha$          | $Kg/(s^3.K)$ | Wärmeübertragungskoeffizient                          |
| $\beta$           |              | Konstante   |
| $\gamma$          |              | Relaxationsfaktor                                     |
| $\Delta\bar{P}$   |              | Die Summe aller Druckabfälle in einem Zweig           |
| $(\Delta P_{st})$ |              | Vektor der gesteuerten Druckquellen                   |
| $\Delta P_{v,ER}$ | $Pa$         | Druckabfälle in einem kreisförmigen Ersatzrohr        |
| $\Delta P_{v,UR}$ | $Pa$         | Druckabfälle in einem Rohr mit beliebigem Querschnitt |
| $\Delta V^{(k)}$  |              | Korrektur des Newton-Raphson-Verfahrens               |
| $\delta,$         |              | Grenzschichtdicke                                     |

---

|                      |                                 |  |
|----------------------|---------------------------------|--|
| $\delta_x, \delta_y$ |                                 | Sign-Funktion  |
| $\varepsilon$        |                                 | Abbruchschranke  |
| $\varepsilon$        |                                 | Dissipationsrate der Turbulenzenergie                  |
| $\eta_t$             | Pa.s                            | Scheinbare Viskosität                                  |
| $\kappa$             |                                 | Absolute Rangigkeit                                    |
| $\kappa$             | J                               | Spezifische Turbulenzenergie                           |
| $\lambda$            | W/(m.k)                         | Wärmeleitfähigkeit                                     |
| $\lambda_{re}$       |                                 | Die Rohrreibungszahl                                   |
| $\nu$                | $\text{m}^2 \text{s}^{-1}$      | Kinematische Viskosität                                |
| $\zeta$              |                                 | Widerstandszahl  |
| $\zeta_R$            |                                 | Widerstandszahl des geraden Rohrs                      |
| $\rho$               | $\text{kg/m}^3$                 | Dichte   |
| $\sigma_\varepsilon$ |                                 | Diffusionskonstante für $\varepsilon$                  |
| $\sigma_\kappa$      |                                 | Diffusionskonstante für $\kappa$                       |
| $\tau_t$             | Pa                              | Schubspannung  |
| $\Sigma dF_s$        | N                               | Auf ein Strömungsteilchen angreifende Kräfte           |
| $(\Phi(x, y))$       |                                 | Vektor der Ansatzfunktion für Luftdruck                |
| $(\Psi(x, y))$       |                                 | Vektor der Ansatzfunktion für Strömungsgeschwindigkeit |
| $\psi$               |                                 | Proportionalitätsfaktor                                |
| $\dot{\Omega}$       | $\text{J/m}^3$                  | Energiedichte  |
| $\Omega^e$           |                                 | Gebiet, in FEM   |
| $\omega$             | Rad/s                           | Winkelgeschwindigkeit                                  |
| $\dot{\omega}$       | $\text{J s}^{-1} \text{m}^{-3}$ | Leistungsdichte der Wärmequelle                        |

# Kapitel 1 Einleitung

## 1.1 Steigerung der Einheitsleistung durch Verbesserung der Kühlung

Werner von Siemens entwickelte den ersten praxistauglichen Generator im Jahr 1866, dessen magnetischer Kreis aus massivem Eisen gefertigt war. Die induzierten hohen Wirbelströme im Eisen verursachten eine hohe Erwärmung des Stators und begrenzten dadurch die Maschinenleistung. 1875 führte der belgische Elektrotechniker Z. T. Gramm erstmals das laminierte Blechpaket im Generator ein [1]. Im Jahre 1901 wurde der zylinderförmige und schnell hochdrehende Generator bei BBC (Brown, Boveri & Cie) in Baden (Schweiz) [2] entwickelt. Durch die Einführung der Roebelstäbe im Jahr 1912 konnten die Wirbelströme und somit auch die Kupferverluste in den Ständerstäben deutlich reduziert werden, was schließlich in Verbindung mit isolierten Kupferlamellen die Ausführung der Ständerstäbe mit hohem Querschnitt ermöglichte. Am Ende der 1920er Jahre erreichten die größten Maschinen Leistungen von 200 MVA.

Durch die ständige Verbesserung der Kühlungsart konnten die zulässigen Stromdichten deutlich gesteigert werden, so dass aus dem gleichem Maschinenvolumen höhere Einheitsleistungen gewonnen werden können. In Abbildung 1.1 sind die zulässigen Stromdichten und die Verluste für die unterschiedlichen Kühlmittel zusammengestellt.

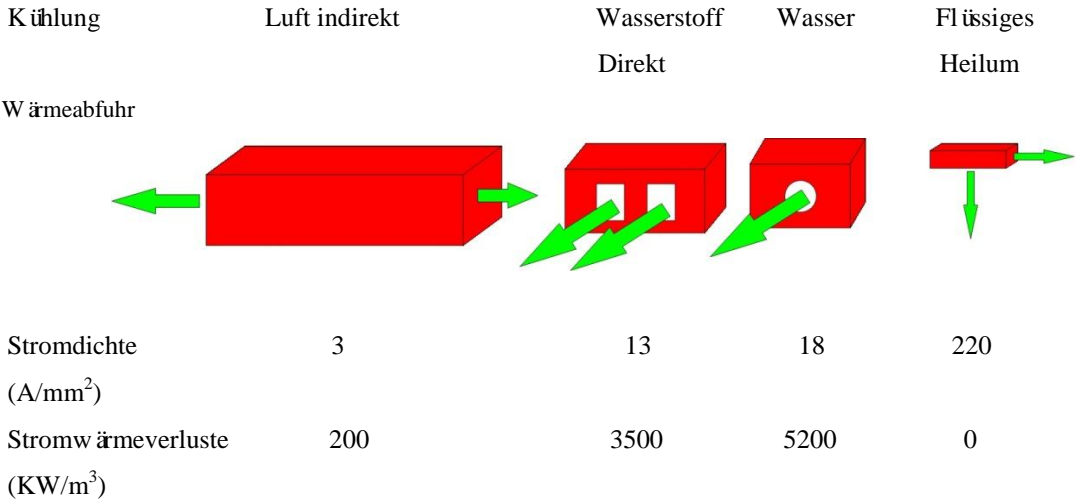


Abbildung 1.1: Zusammenhang zwischen den zulässigen Stromdichten und verwendeten Kühlmitteln [3]

In den 30er Jahren führte Westinghouse in den USA die Wasserstoffkühlung ein. Diese verbesserte die Effizienz der Wärmeübertragung und somit die Maschinenkühlung erheblich.

---

Eine weitere Steigerung der Einheitsleistung wurde im Jahr 1956 in England durch die Einführung der Wasserkühlung in den Wicklungsstäben des Stators erreicht. Der nächste bedeutende Entwicklungsschritt war im Jahre 1970 die Ausweitung der Wasserkühlung auf den Rotor von Westinghouse in den USA und Kraftwerk Union in Deutschland, wodurch die Generatorleistung auf 900 MVA gesteigert wurde.

Wegen der komplizierten Technik und der hohen Kosten wird diese Ausführung bei den heutigen 2- und 4-poligen Generatoren nur im höchsten Leistungsbereich von 900 MVA bis 2000 MVA verwendet.

Unabhängig von der Kühlungsart der Wicklungen in Stator und Rotor werden das Blechpaket und das Gehäuse mit Gas (Wasserstoff bzw. Luft) gekühlt.

Ein weiterer großer Leistungssprung könnte zukünftig durch die Einführung supraleitender Materialien für die Stator- und Rotorwicklungen erreicht werden. Bereits im Jahre 1992 wurde ein Prototyp eines 850-MVA-Generators bei Siemens in Mülheim fertiggestellt, der jedoch aufgrund seiner sehr komplexen Technologie und der damit verbundenen Ausfallgefahr bis heute nicht in Kraftwerken eingesetzt wurde.

Im Jahre 1960 wurde ein neu entwickelter Isolationsstoff auf Basis der Micafoliumbandisolierung eingeführt, wodurch die Maschinen bei Temperaturen bis 155 °C betrieben werden können [4]. Eine weitere Leistungssteigerung konnte durch die Erhöhung des Rotorbauvolumens erreicht werden. Hierbei sind jedoch die konstruktiven Grenzen für die aktive Ballenlänge  $L$  durch den zulässigen Schlankheitsgrad  $\lambda = L/D$  und den Außendurchmesser des Rotors  $D$  erreicht.

Weltweit werden ca. 12000 Kraftwerke mit einer Leistung von 50 MVA bis 1800 MVA zur Umwandlung von mechanischer in elektrische Energie betrieben: in Finnland befindet sich zur Zeit das größte nukleare Kraftwerk mit einer Blockleistung von 2000 MVA in der Phase der Inbetriebnahme.

In Abbildung 1.2 ist die Zuordnung des Leistungsgewichtes zu der Blockleistung am Beispiel bereits ausgeführter und geplanter Generatoren dargestellt.

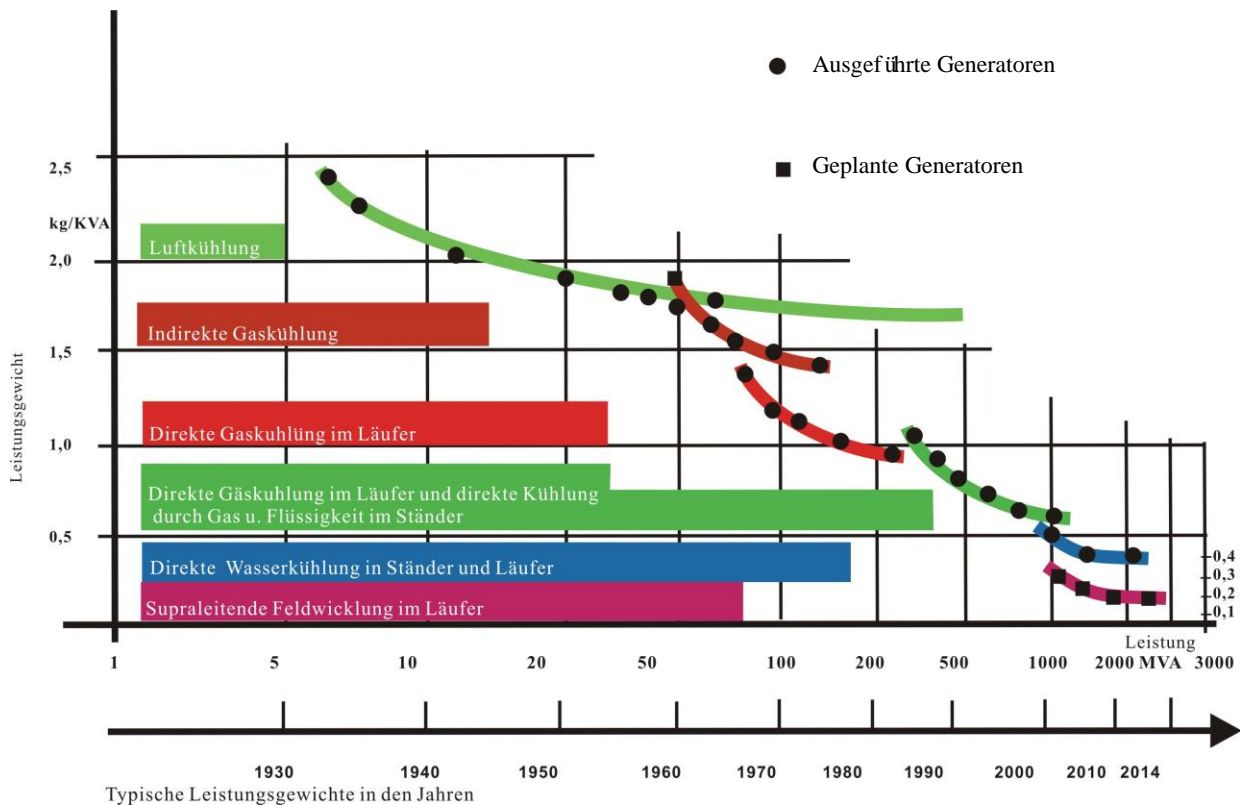


Abbildung 1.2: Entwicklung des Leistungsgewichtes von Turbogeneratoren [5]

Hieraus geht hervor, dass die Erhöhung der Einheitsleistung vor allem durch den Einsatz besserer Kühlsysteme möglich ist.

Die Grenzen zwischen den Bauarten sind fließend und variieren von Hersteller zu Hersteller.

Bei der aktuellen Entwicklung von Turbogeneratoren werden folgende Ziele angestrebt:

- Erhöhung der Effizienz
- Verbesserung der Zuverlässigkeit
- Reduzierung der Produktionskosten
- Neue Konstruktionslösungen.

Um die oben dargestellten Forderungen zu erfüllen, werden immer häufiger aufwendige Wasserstoffkühlungen und die Wasser-Wasserstoffkühlungen durch einfachere Luft- oder reine Wasserstoffkühlungen ersetzt, denn die Luftkühlung besitzt folgende Vorteile:

- Es wird kein zusätzliches Kühlmedium benötigt.
- Der Aufbau des Kühlsystems ist einfacher.
- Es sind keine speziellen technischen Maßnahmen für die Abdichtung des Wasserstoff- bzw. des Wasserkreislaufes notwendig.

---

Gegenwärtig erreichen die größten luftgekühlten Generatoren eine Leistung von bis zu 500 MVA. Zur weiteren Leistungssteigerung müssen neue konstruktive Lösungen und verbesserte Materialien eingesetzt werden. Zu den vielversprechendsten Maßnahmen gehören:

1. Verbesserung der Konstruktion des Ständerstabes, der aus mehreren Teilleitungen zusammengesetzt wird. Der Querschnitt des einzelnen Teilleiters wird minimiert, damit die durch Wirbelströme verursachten Wärmeverluste abnehmen, gleichzeitig verändert sich die Form des Querschnitts der einzelnen Teilleitern einer Viereck- zu einer Kreisform.
2. Verbesserung der Kühlung des Blechpaketes und des Abschirmringes im Bereich der Endzone der Maschine. Durch Reduzierung der Paketbreite und Einsatz der Wasserkühlung im Abschirmring kann die Kühlung deutlich verbessert werden.
3. Verbesserung der Kühlsysteme durch Einsatz einer größeren Anzahl von Luftkammern, um die Effizienz der Kühlung zu steigern.



**Abbildung 1.3: Vierpoliger Turbogenerator mit einer Leistung von 1700 MVA [1]**

Weiteres Potential für die Steigerung der Einheitsleistung wurde bei den Generatoren mit Hochtemperatur-Supraleitern (HTSL) erkannt. Bei diesen Maschinen werden die Läufer- und Ständerwicklungen aus supraleitenden Materialien ausgeführt und auf tiefe Temperaturen von ca. 80 K mit flüssigem Stickstoff gekühlt.

Neben den ursprünglichen Supraleitern der ersten Generation (Bi-2223) werden gegenwärtig HTSL der zweiten Generation auf Basis des Yttrium-Barium-Kupferoxides (YBCO) entwickelt. Die aus verdrehten HTSL bestehenden Roebelstäbe erlauben eine flexible Anpassung an

die Spannungs- und Stromverhältnisse in den Wicklungen. Aber der große Preisunterschied zwischen dem HTSL-Material und dem heutigen Kupfer verhindert, dass dieses Material für den Wicklungsbau in Rotor und Ständer eingesetzt wird. Es wird erwartet, dass in der Zukunft der Preis für die Supraleiter deutlich abnimmt [2].

Die Generatoren mit supraleitenden Wicklungen weisen gegenüber den konventionellen Maschinen klare wirtschaftliche Vorteile auf:

- Materialeinsparung
- kleine Abmessungen und Gewichte
- Wirkungsgradverbesserung
- höhere Maschinenspannungen.

Sie sind den konventionellen Generatoren auch technisch klar überlegen durch:

- größere Stabilität und kleinere Reaktanzen
- höherer Blindleistungsbereich im untererregten Betrieb
- höhere zulässige Schiefastbelastung
- Verzicht auf Wasserstoff als Kühlgas, was für konventionelle Maschinen dieser Größe Grundvoraussetzung für das Erzielen der Leistung ist.

Wie groß die Einsparungen durch den Einsatz von supraleitenden Wicklungen sind, lässt sich aus dem Vergleich repräsentativer Größen in Abbildung 1.4 ablesen.

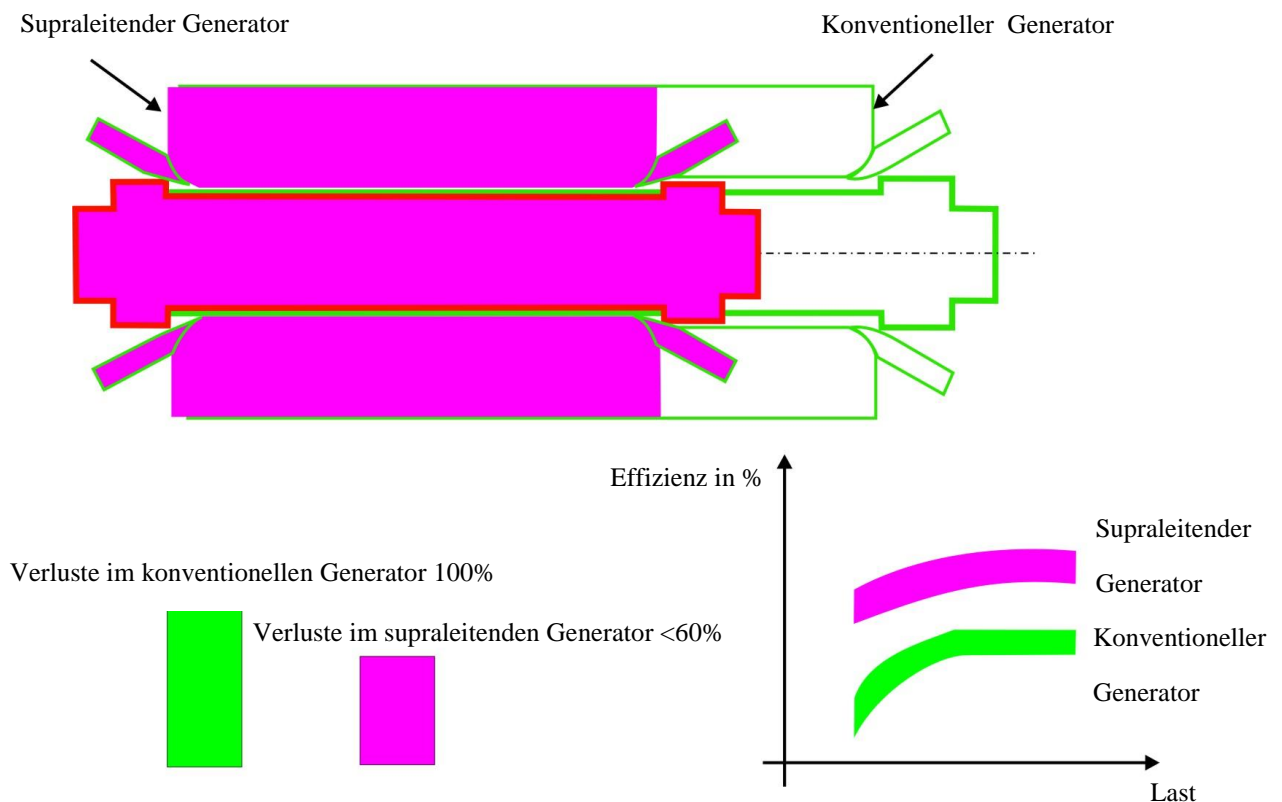


Abbildung 1.4: Gegenüberstellung der Eigenschaften konventioneller und supraleitender Generatoren [6]

---

Über 100 Jahre lang sind unterschiedliche Formen von Turbogeneratoren entwickelt worden, um die steigenden Bedürfnisse der Energieversorgung zu erfüllen. Die Reduzierung der Verluste ist immer die wichtigste Aufgabe gewesen. Daher werden auch in der Zukunft neue Technologien eingeführt, welche die Einheitsleistung und den Wirkungsgrad relativ steigern werden.

Vor diesem Hintergrund kommt in der Zukunft dem in dieser Arbeit behandelten Thema „Analyse der Temperaturverteilung und Wärmeabfuhr in Kraftwerksturbogeneratoren“ große Bedeutung zu.



## 1.2 Entwurf des Kühlsystems

Eine Überhitzung der Maschine kann zur Beschädigung der Isolationsschicht in den Stator- und Rotorstaben führen, welche in der Regel Windungs- und Phasenschlüsse oder Erdschlüsse hervorruft. Diese haben fast immer einen Ausfall des Generators und lange Reparaturzeiten zur Folge. Der wirtschaftliche Schaden wird dadurch verstärkt, dass ein Maschinenausfall nicht nur die Reparatur, sondern auch Ausfallkosten nach sich ziehen, die häufig das Vielfache der Investitionskosten für eine Maschine überschreiten. Die sorgfältige Auslegung der Maschine und das frühzeitige Erkennen der sich anbahnenden Schäden durch ein entsprechendes Diagnosesystem können wesentlich dazu beitragen, die Häufigkeit der Fehler zu reduzieren und eventuelle Sanierungsmaßnahmen rechtzeitig einzuleiten. Sie helfen somit den Schadensumfang deutlich einzugrenzen [7].

Eine wichtige Maßnahme, um solche Schäden zu vermeiden, ist ein präziser Entwurf des Kühlsystems bereits in der Entwicklungsphase eines Maschinentyps. Die möglichst genaue Vorhersage der Temperaturverteilung in der Maschine ist der wichtigste Aspekt beim Entwurf eines Kühlsystems.

Dieser basiert auf der Analyse des thermischen Netzwerks, das für jeden Maschinentyp neu gebildet werden muss. Die Grundelemente eines solchen Netzwerkes sind die Wärmequellen, die Wärmewiderstände und Wärmekapazitäten, deren Parameter mit Hilfe einer elektromagnetischen und strömungsmechanischen Analyse oder aus den Messungen an vergleichbaren Maschinentypen bestimmt werden. Die Netzwerkelemente unterscheiden sich durch ihre geometrische Ausprägung, die Materialien sowie die Lage innerhalb der Maschinen und weisen somit verschiedene Randbedingungen auf. Deswegen ist die Vorausberechnung dieser Parameter mit erheblichem Aufwand verbunden, der nur teilweise automatisiert und programmiert werden kann. Es verbleibt ein großer Teil der Berechnung, der manuell ausgeführt werden muss.

Bei der Nachbildung der Maschine müssen alle Arten der Wärmeübertragung erfasst werden. Hierzu zählen die Wärmeleitung und die Konvektion, welche den Hauptanteil ausmachen, sowie die Strahlung, die hier eine geringere Rolle spielt. Sie finden alle gleichzeitig statt, wenn die Maschine im Lastzustand am Netz betrieben wird.

Bei dem Aufbau eines Netzwerkes müssen zunächst die Wärmequellen identifiziert werden. Die größten Beiträge zur Erwärmung entstehen durch [8]:

- Stromwärmeverluste in den Wicklungen im Bereich der Wickelköpfe
- Eisenverluste durch Hysterese und Wirbelströme im Ständerblechpaket
- Stromwärmeverluste in den Rotorwicklungen

- Eisenverluste im massiven Eisen des Rotorkörpers
- Stromwärmeverluste in den Stator- und Rotorwicklungen im aktiven Bereich der Maschine. Sie setzen sich aus Gleichstromverlusten, Stromverdrängungsverlusten und Schlingstromverlusten zusammen und sind temperaturabhängig.

Die Wärmequellen werden im Netzwerk als Stromquellen dargestellt.

Der konstruktive Aufbau hat großen Einfluss auf die Temperaturverteilung in der Maschine: Z. B. beeinflusst die Anordnung der Hohlteileiter im Stab den Wärmefluss und die Temperaturverteilung im Läuferkörper beträchtlich. Ebenfalls ist es unbedingt notwendig, die Temperaturverteilung nicht nur im gesamten Stab der Ständerwicklung, sondern auch in jedem Teilleiter zu bestimmen. In dem thermischen Modell wird infolgedessen jeder Teilleiter als gesondertes Widerstands- und Wärmequellenelement abgebildet. Dabei wird jeder Teilleiter als ein in axialer, radialer und tangentialer Richtung mit anderen Elementen verbundenes Element dargestellt, wie Abbildung 1.5 zeigt:

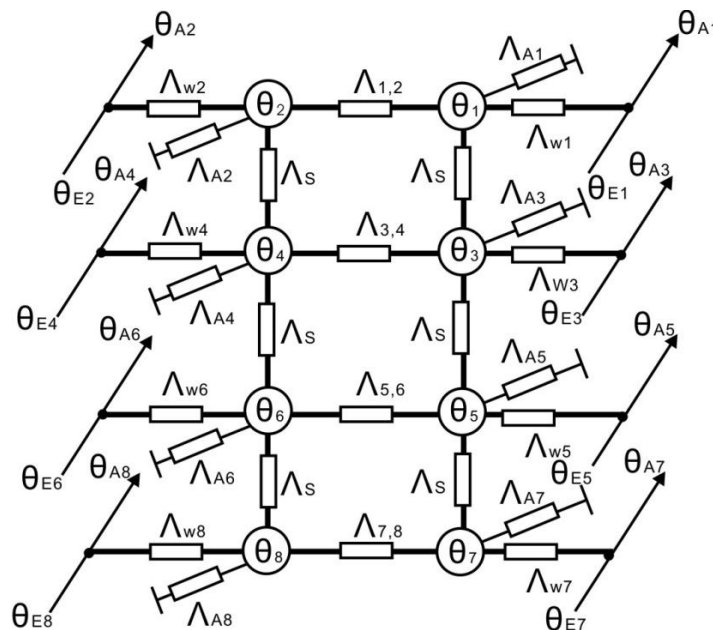


Abbildung 1.5: Wärmequellennetz eines Stabes mit Teilleitern, ohne Kröpfstellen [9]

( $\theta_{Ei}$ : die Eintritttemperatur des Wassers,  $\theta_{Ai}$ : die Temperatur außerhalb des Stabes,  $\theta_i$ : die Temperatur des Teilleiters,  $\Lambda_{Si}$ : Wärmeleitwerte in senkrechter Richtung,  $\Lambda_{i,i+1}$ : Wärmeleitwerte in waagerechter Richtung,  $\Lambda_{Ai}$ : der Wärmefluß nach außen durch die Isolierungshülse,  $\Lambda_{wi}$ : die Wärmeabgabe an das Wasser im Kühlkanal)

Um das Netzwerk aufzubauen, ist es notwendig, die geometrische Struktur ausführlich zu analysieren, um die wesentlichen Strömungen zu identifizieren und diese in dem gesamten System zu berücksichtigen. Bei Aufbau des Netzwerkes werden die wesentlichen Bauteile der

---

Maschine in viele kleine Teilbereiche aufgeteilt und durch ein Netzwerk von Widerständen dargestellt, analog zu einem elektrischen Netzwerk. Einige Elemente des Netzwerkes sind nichtlinear, so hängen z. B. die Wärmeübergangskoeffizienten von der Temperatur und der Strömungsgeschwindigkeit des Kühlmediums ab, also Größen, die in dem Gleichungssystem als Unbekannte definiert werden. Hieraus lässt sich ableiten, dass das beschreibende Gleichungssystem nichtlinear ist und nur iterativ gelöst werden kann.

Bei der Ermittlung der Netzwerkparameter wird schnell klar, dass völlig unterschiedliche Ansätze notwendig sind, um z. B. die Widerstände eines Kühlkanals oder aber des Läuferwickelkopfes unterhalb der Rotorkappe zu bestimmen.

In der Praxis wurden in der Vergangenheit die Parameter vorwiegend mit Hilfe analytischer Gleichungen berechnet, die für häufig benutzte geometrische Anordnungen aus der Strömungsmechanik abgeleitet und durch einfache Versuche im Prüffeld verifiziert wurden. Für die komplizierten Strukturen, die sich nicht durch einfache Anordnungen approximieren ließen, wurden Versuchsreihen an Modellen durchgeführt und die Ergebnisse in Form von empirischen Gleichungen oder gemessenen Funktionsverläufen zusammengefasst.

Gegenwärtig werden bei der Behandlung von Erwärmungsproblemen Anstrengungen unternommen, den gesamten Generator mit Hilfe der dreidimensionalen Finite-Element-Methode für Fluide zu modellieren und transient zu berechnen.

Eine solche Vorgehensweise ist einerseits sehr anspruchsvoll und erlaubt es, sehr detailliert die Konstruktionsmerkmale der Maschine sowie die Wärme- und Temperaturverteilung in den einzelnen Komponenten zu erfassen. Andererseits ist der Aufwand für die Modellierung und die anschließende Computerberechnung so groß, dass es für eine routinemäßige Auslegung der Maschinen nicht praktikabel ist. Es sind zurzeit nur einige wenige Arbeiten veröffentlicht, in denen die Ergebnisse einer solchen Betrachtung präsentiert werden[10].

Angesichts dieser Situation bietet sich die Kombination der beiden vorstehend vorgestellten Verfahren als eine rationale Lösung zur Auslegung von Generatoren an. Hierbei bildet das Wärmenetzwerk weiterhin die Basis für die Berechnung, jedoch mit der Modifikation, dass für die ausgewählten Maschinenbereiche die Wärmewiderstände mit Hilfe der FE-Methode bestimmt werden. Dabei werden insbesondere die Bereiche behandelt, die auf die Kühlmittelverteilung in der Maschine großen Einfluss haben, oder aber die Komponenten, die innerhalb der Maschine thermisch sehr hoch beansprucht werden und die Einheitsleistung begrenzen. Als Beispiele hierzu können Ständer- und Rotorwickelköpfe sowie die Kühlkanäle im Rotor genannt werden.

---

## 1.3 Ausgewählte Publikationen

Die Erwärmung von elektrischen Maschinen führt zu einem Anstieg der lokalen Temperaturen einzelner Komponenten und ist eine maßgebliche Einflussgröße bei der Auslegung von Maschinen.

Neben den mechanischen und elektrischen Beanspruchungen ist es daher notwendig, auch die thermische Belastung bei transientem und stationärem Betrieb zu bestimmen, um die zulässigen Betriebszustände anzugeben.

Die Überschreitung der zulässigen Temperaturen führt fast immer zur Reduktion der Lebensdauer oder sogar zur Beschädigung der Maschine. Der Fokus wird insbesondere auf die Isoliersysteme der Wicklungen sowie auf die Lager gerichtet.

Aus diesem Grund gehört die thermische Auslegung zu den wichtigsten Aufgaben bei der Dimensionierung der Maschinen. Eine große Anzahl von Typen und konstruktiven Lösungen führte dazu, dass fast jeder Hersteller ein eigenes angepasstes Berechnungsmodell entwickelt und dieses durch ergänzende Messungen optimiert hat. Entsprechend dieser Vielfalt an Modellen und Verfahren, findet sich in der Literatur eine große Anzahl von Publikationen, die sich mit den verschiedenen Aspekten der Erwärmung befassen. Nachfolgend werden die Veröffentlichungen vorgestellt, die zu dieser Arbeit direkten Bezug haben und deren Erkenntnisse bei der Lösung eingeflossen sind.

Sie lassen sich, entsprechend der behandelten Schwerpunkte, in folgende vier Themenbereiche zusammenfassen:

- Modellierung
- Berechnungsverfahren
- Bestimmung der Wärmeverluste
- Anwendungsbeispiele.

### 1.3.1 Modellierung mit Hilfe der Wärmequellennetzwerke

Die verschiedenen Teile des Turbogenerators haben unterschiedliche geometrische Formen und zeichnen sich durch verschiedene Kühlmechanismen aus. Der Wärmeaustausch erfolgt vorwiegend durch erzwungene Konvektion, wobei bei großen Turbogeneratoren verschiedene Kühlmittel kombiniert werden.

Ein bewährtes Verfahren zur Analyse der Temperaturverteilung in elektrischen Maschinen basiert auf der Theorie der Wärmequellennetzwerke.

In der Veröffentlichung von K. Sedlazeck [9] wird die Temperaturverteilung in den Ständerstäben eines Generators mit wassergekühlter Ständerwicklung untersucht. Der Schwerpunkt wird auf die Auswirkungen von Verstopfungen in den Hohlteileitern, die durch Korrosion verursacht werden, gelegt. Zu Beginn wird ein Wärmequellennetzwerk aufgebaut, das aus den Temperaturknoten, den Wärmeleitwerten und den Wärmequellen besteht. Um die Tempera-

---

turverteilung über die Nuttiefe zu bestimmen, werden in dem Netzwerk alle acht Teilleiter abgebildet. Da die Teilleiter im Stab zueinander verdrillt sind, ändern sich die Knotenverbindungen entlang des Stabes, von Querschnitt zu Querschnitt, was im Netzwerk berücksichtigt werden muss. Die Teilleiter sind aus gut leitfähigem Kupfer gefertigt, deswegen kann angenommen werden, dass zwischen ihnen keine Temperaturdifferenz auftritt, solange sie nicht durch Korrosion auf Grund lokaler Überhitzung beschädigt wurden.

Unter der Annahme, dass die Temperatur außerhalb des Stabes und die Temperatur des zugeführten Wassers bekannt sind, wird die Energiebilanz aufgestellt und die Temperatur der Teilleiter hergeleitet. Hierbei werden alle drei Verlustarten berücksichtigt: die Gleichstromverluste, die Strom-Verdrängungsverluste und die Schlingstromverluste. Da in einer Nut zwei Stäbe verbaut werden, müssen zusätzlich die Phasenlagen der Ströme in Ober- und Unterlage miterfasst werden.

Eine ähnliche Vorgehensweise bei der Untersuchung der Temperaturverteilung in einem Ständerstab eines Generators wird in der Veröffentlichung von M. Rioual beschrieben [13]. Das vorgestellte Berechnungsmodell wird von Rioual dahingehend erweitert, dass außer der Wärmeleitung zwischen den Teilleitern selbst auch noch die Wärmeleitung zwischen den Teilleitern und dem Eisenblech erfasst werden. Dadurch wird ein realitätsnaher Wärmefluss im Bereich der Ständernut erreicht, was schließlich zu kleineren Abweichungen gegenüber den Messwerten im gesamten thermischen Netzwerk führt.

Li Heming behandelt in [14] ebenfalls den Wärmefluss und die Temperaturverteilung in einer Maschine, deren Ständerwicklungen mit Wasser und das Blechpaket mit Wasserstoff gekühlt werden. Der Fokus wird auf den Wärmefluss zwischen dem Stab und dem Blechpaket gelegt. Die Analyse wird für ein Teilbereich des Stators (Abbildung 1.6) durchgeführt, im 3-dimensionalen Modell werden neben dem Blechpaket und den Stäben auch die radialen Schlitze berücksichtigt.

Die Theorie der Wärmeübertragung und der Strömungsmechanik werden kombiniert, um ein möglichst genaues mathematisches Modell aufzubauen. Den Ausgangspunkt bildet ein System von drei partiellen Differentialgleichungen für die Temperaturverteilung in einem kleinen Element des Blechpakets, wobei sowohl die Wärmeleitung als auch die Konvektion berücksichtigt wird. Die wesentlichen Parameter im Gleichungssystem sind die Verluste, der Wärmeleitungskoeffizient, der Wärmeübertragungskoeffizient sowie die Wärmespeicherkapazität.

Die Analyse des Wärmeflusses erfolgt im stationären Zustand, die Eintrittstemperatur des Wassers im Hohlleiter wird, wie schon in der Veröffentlichung von M. Rioual, als bekannt angenommen.

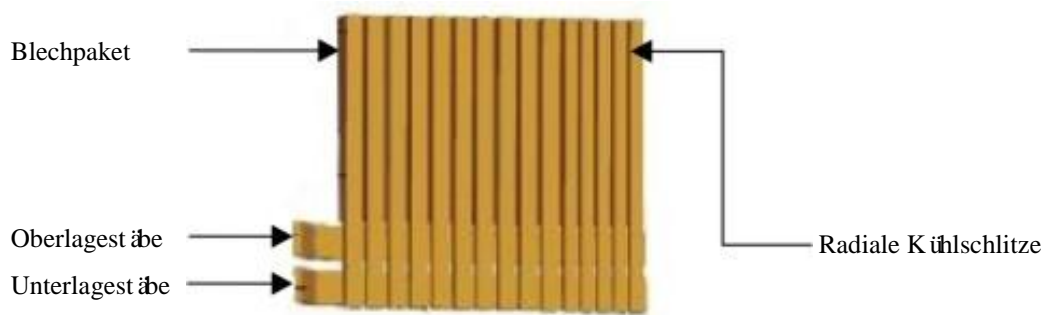


Abbildung 1.6: Lösungsbereich des Temperaturfeldes im Ständer [14]

### 1.3.2 Bestimmung der Wärmeverluste

Katzumi Yamazaki beschreibt in [15] das Verfahren zur Ermittlung der Verluste in der Endzone eines Generators. Die Verluste werden an einem speziell hierfür gebauten Modell gemessen, das aus einem C-förmig geblechten Schenkel und einem quadratischen, ebenfalls geblechten Epsteinrahmen aufgebaut ist. Auf dem C-förmigen Schenkel ist eine Spulenwicklung angebracht, die mit einem sinusförmigen 50-Hz-Strom gespeist wird, sodass der Epsteinkern von einem Wechselfeld durchsetzt wird (Abbildung 1.7).

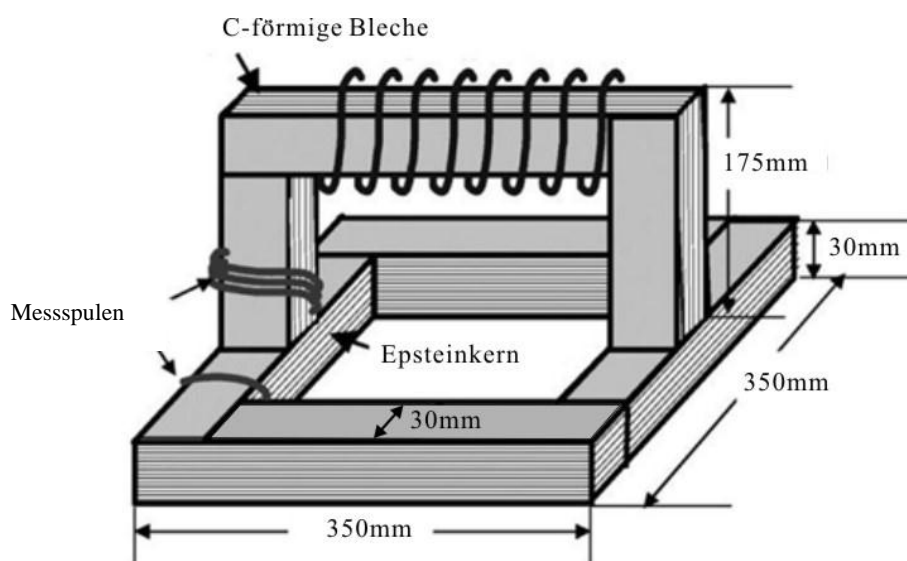


Abbildung 1.7: Messanordnung zur Bestimmung der Verluste in laminierten Blechprobe [15]

Die Spule wird so angeordnet, dass das Feld senkrecht zur der Oberfläche in das Blechpaket eindringt. Der in dem Epsteinkern induzierte magnetische Fluss wird mit einer zweiten Spule gemessen.

---

Im zweiten Schritt wird die in Abbildung 1.7 dargestellte Anordnung mit einem FE-Modell nachempfunden. Die Erstellung des FE-Modells gestaltet sich schwierig, weil zur korrekten Verlustberechnung die einzelnen Bleche des Kernes sowie die sehr dünne (kleiner  $10\mu\text{m}$ ) Isolationsschicht modelliert werden müssen. Dadurch wird das Berechnungsmodell sehr umfangreich, was eine sehr hohe Elementzahl und eine lange Berechnungszeit zur Folge hat. Um den Modellierungsaufwand zu begrenzen, wird nur die Flusskomponente in Richtung der Blechlamelle berücksichtigt. Die Wirbelströme senkrecht zur Lamellenfläche werden durch die Annahme, dass die Leitfähigkeit  $\sigma_z$  gleich 0 ist, unterbunden. Mit Hilfe des oben beschriebenen FE-Modells werden die Ummagnetisierungs- und Wirbelstromverluste berechnet und mit den gemessenen Werten verglichen, wobei eine sehr gute Übereinstimmung nachgewiesen wird.

Das Berechnungsmodell ist recht allgemein formuliert, so dass die gewonnenen Erkenntnisse über FE-Berechnungen von Verlusten in den geschichteten Blechen direkt auf Blechpakete von Generatoren und Transformatoren übertragen werden können.

Frank Fischer behandelt in seiner Dissertation ausführlich den Wärmefluss und die Temperaturverteilung in der wassergekühlten Ständerwicklung von Grenzleistungs-Turbogeneratoren [16]. Das Ziel der Arbeit ist die Entwicklung eines Diagnosesystems zur Detektion von Verstopfungen durch Korrosionsprodukte in den Wasserkanälen, welche den Wasserfluss verhindern. Die hierdurch entstehenden Heißpunkte können schließlich zur Beschädigung des ganzen Stabes und zu einem längeren Ausfall der Maschine führen.

Der Generator wird in drei Hauptkomponenten, die Stator- und Rotorwicklung sowie das Blechpaket unterteilt, für die die zugehörigen thermischen Modelle in Form von Wärmeenergiegleichungen aufgestellt werden. Mit Hilfe eines Beobachters werden die Kühlgastemperaturen und Eisenrandtemperaturen im Nutbereich bestimmt.

Als Referenzgröße wird die Warmwassertemperatur verwendet. Die Bewertung der Beobachterfehler erfolgt mit einer Diagnosekomponente, die auf der Fuzzy-Logik basiert. Ausgehend von den gewonnenen Erkenntnissen wird von dem Autor ein Konzept für ein Diagnosesystem zur Ermittlung von Fehlern in den Ständerstäben von wassergekühlten Generatoren entwickelt und in Form eines Prototyps praktisch realisiert. Es wird nachgewiesen, dass das neue Diagnosesystem kontinuierlich und mit einer sehr hohen Empfindlichkeit von 0.5 K die Temperaturwerte bestimmen kann.

Ein sehr innovatives Verfahren zur Berechnung der Temperaturverteilung in einem direkt gekühlten Läufer eines Turbogenerators wird von Mihai Lordache und Co. in [17] vorgeschlagen.

Die Untersuchung wird in zwei Schritten durchgeführt. Zunächst wird für einen Wellenausschnitt ein konventionelles Netzwerk mit Widerständen und Verlustquellen generiert. Der untersuchte Raum wird auf dreidimensionale Volumenelemente sehr fein aufgeteilt und für jedes Element ein Ersatzwiderstand und eine Verlustquelle bestimmt. Die Raumaufteilung sowie die Bestimmung der Elementparameter werden weitgehend automatisiert; ein dreidi-

---

mensionales Netzwerkmodell wird ebenfalls automatisch durch den Computer generiert (Abbildung 1.8). Das Wärmenetzwerk zeigt eine enge Analogie zu dem elektrischen Netzwerk: die Wärmeübertragungswiderstände für die Wärmeleitung und für die Konvektion entsprechen den elektrischen Widerständen und die Temperaturdifferenzen entsprechen den Spannungsquellen. Die analoge Größe für den Wärmefluss bildet der elektrische Strom. Die aufgestellten nichtlinearen Netzwerkgleichungen werden mit Hilfe des Electronic Circuit Symbolik Computer-Programms gelöst, wobei der Algorithmus von Newton-Raphson angewandt wird.

Im zweiten Schritt wird ein besonders interessierendes kleines Teilgebiet innerhalb des Rechengebietes, z. B. der Bereich in dem die Hotspots zu erwarten sind, mit Hilfe der 3-D-Finite-Differenzen-Methode sehr detailliert modelliert und anschließend berechnet. Für das ausgewählte Teilgebiet werden die notwendigen Randbedingungen aus der vorgeschalteten Netzwerkberechnung übernommen. Durch eine solche Vorgehensweise wird der Rechenaufwand im Vergleich zu einer vollständigen 3-D-FE-Berechnung deutlich reduziert, bei ausreichender Erfahrung werden dennoch die für die Auslegung relevanten thermisch hochbeanspruchten Orte erfasst.



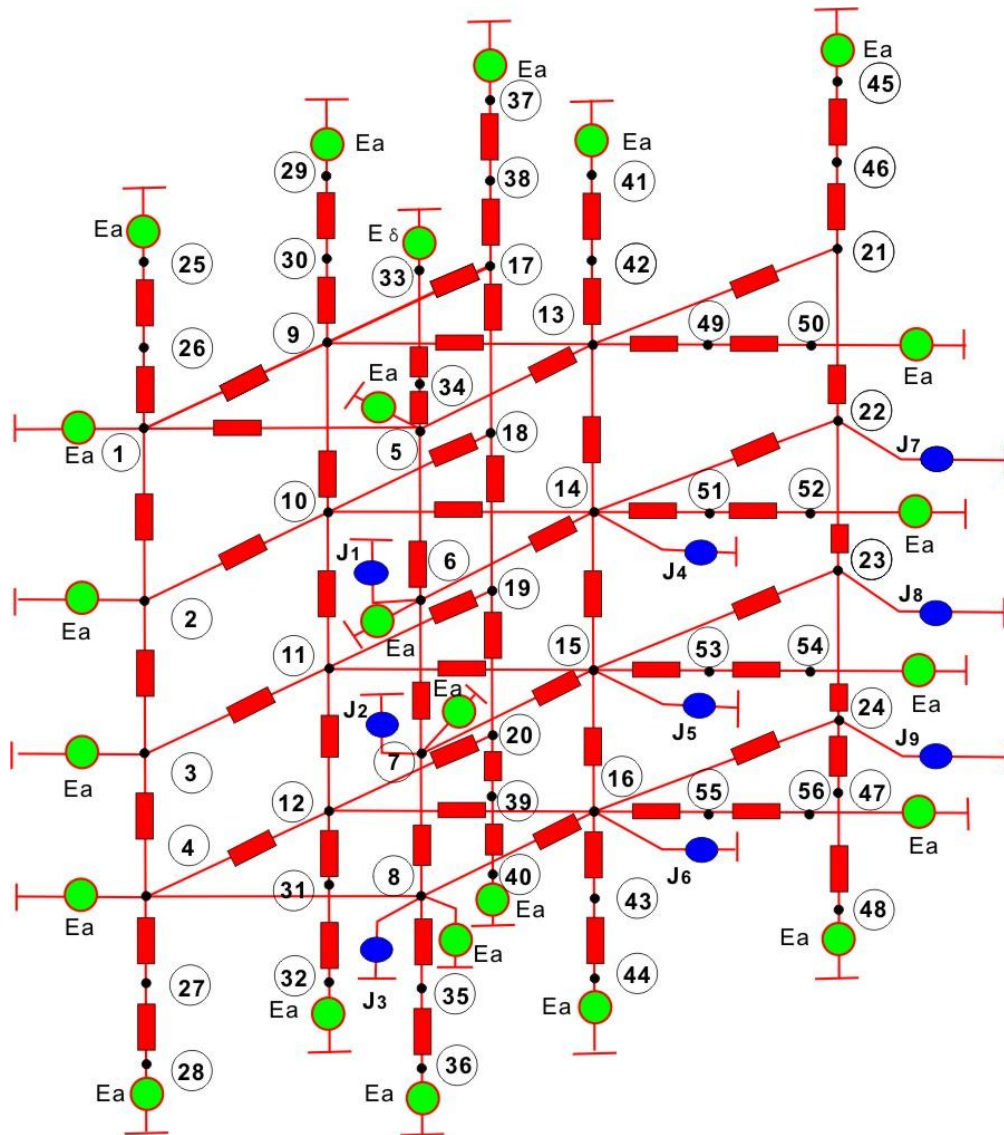

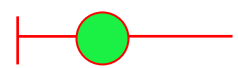
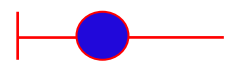



Abbildung 1.8: Thermisches Ersatzschaltbild [18]

Abbildung 1.8 stellt ein thermisches Ersatzschaltbild dar. Die Elemente haben folgende Bedeutung:

- 
Die durch die Wärmeleitung und Konvektion hervorgerufenen thermischen Widerstände
  
- 
Die Temperaturänderung
  
- 
Die Wärmequelle
  
- 
Die Knotennummer

### 1.3.3 Einsatz der FE-Methode zur Bestimmung der Temperaturverteilung

Dem Ingenieur stehen inzwischen mehrere kommerzielle Computerprogramme zur transienten Berechnung der Temperaturverteilung in geschlossenen Systemen unter Berücksichtigung der Kühlung durch die Strömungsfelder von Gasen und Flüssigkeiten zur Verfügung. Am meisten verbreitet sind: ADINA-Flow, ANSYS-Fluent und ANSYS-CFX.

In der Literatur lassen sich bereits einige Beispiele für die Anwendung dieser Programme zur Berechnung der Temperaturverteilung in den Generatoren finden. Um die Größe der Berechnungsmodelle zu begrenzen, werden in den meisten Veröffentlichungen nur Teilbereiche behandelt. Es gibt jedoch auch Beispiele, bei denen die ganze Maschine nachgebildet wird. In diesen Fällen werden jedoch starke Modellvereinfachungen gemacht, damit das System noch überschaubar und berechenbar bleibt.

Z. B. wird in der Veröffentlichung von M. S. Rajagopal ein radial gekühlter Motor berechnet [19]. Zur Vereinfachung wird angenommen, dass der Motor eine axiale und tangentielle Symmetrie aufweist, wodurch das FE-Modell auf ein 2-D-Modell für die halbe Maschine reduziert werden kann (Abbildung 1.9). Der Wickelkopf, häufig bestimmende Komponente bei der Auslegung der Maschinen, wird vernachlässigt.

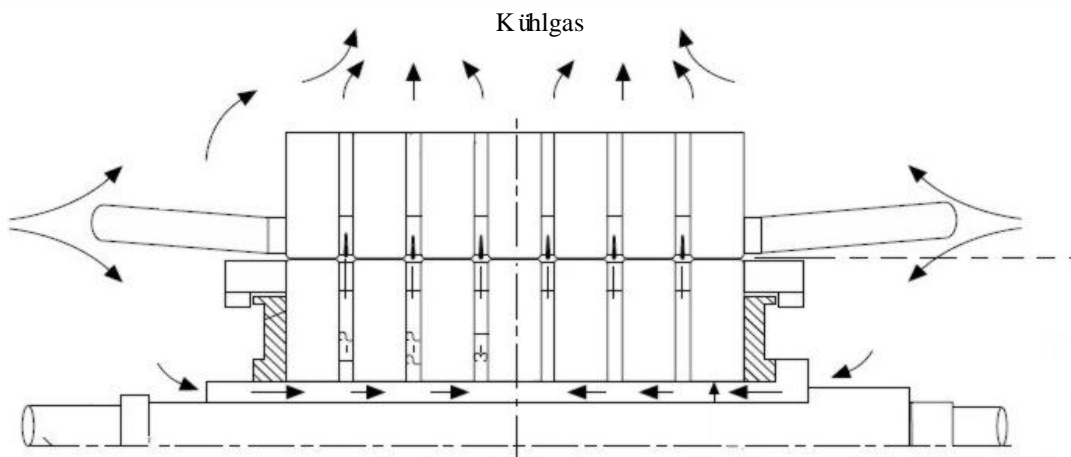


Abbildung 1.9: 2-D-Modell des untersuchten Motors [19]

Da in einer realen Maschine die Kühlung hauptsächlich durch Konvektion erfolgt, ist es zwingend notwendig, die Kühlgasverteilung und Geschwindigkeit des Kühlgases zu bestimmen.

In der Veröffentlichung von Wei Tong wird eine numerische Analyse des Strömungsfeldes im Wickelkopfbereich eines Generators mit Hilfe der CFD-Methode (*computational fluid dynamics*) durchgeführt [20]. Wegen des komplizierten Aufbaus mit unregelmäßigen geometrischen Formen ist der Wickelkopf für die Untersuchung mit klassischen Methoden nicht ge-

eignet. Die Luftdruckabfälle und die Strömungsgeschwindigkeiten im Bereich der Wickelkopfstäbe, der Bandage und des Rotorwickelkopfs können nur durch eine Simulation ermittelt werden. Sie werden in Plots visualisiert und mit den Ergebnissen, die durch ein 1-D-Netzwerk ermittelt werden, verglichen.

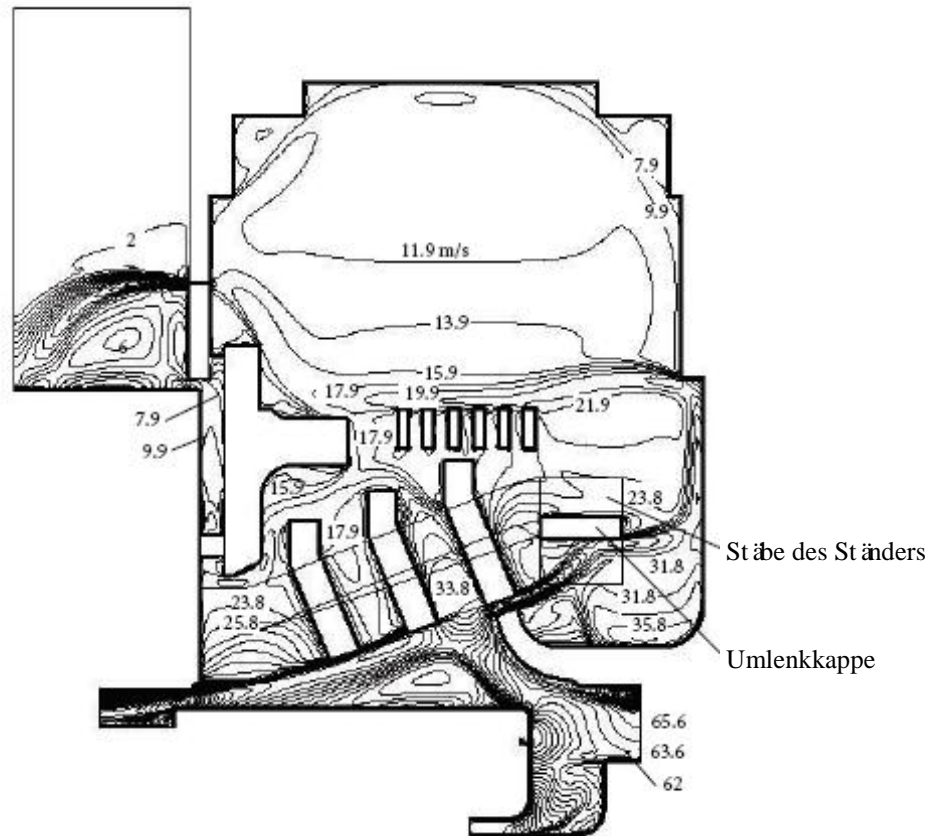


Abbildung 1.10: Strömungsgeschwindigkeitsfeld im Wickelkopf eines Generators [20]

Besondere Aufmerksamkeit verdient die Arbeit von Itaka [21], die 2013 veröffentlicht wurde. Der Autor hat einen Turbogenerator kleiner Leistung vollständig in 3-D modelliert und die Strömungsfelder sowie die Temperaturverteilung mit einem CFD-Verfahren bestimmt (Abbildung 1.10). Die Strömungsfelder wurden in 3-D als Vektorfelder dargestellt und durch die Animation die Bewegung des Kühlgases aufgezeigt. Allerdings stellt die Arbeit nur den ersten Versuch einer ganzheitlichen Betrachtung der Maschine dar. Es konnte zwar gezeigt werden, dass eine solche Simulation prinzipiell möglich ist, jedoch rechtfertigt der mehrmonatige Aufwand für die Modellierung und Berechnung derzeit noch nicht eine solche Vorgehensweise bei dem Design von neuen Maschinentypen.

---

Zusammenfassend lässt sich feststellen, dass zur Berechnung der Gas- und Temperaturverteilung in elektrischen Maschinen das Verfahren der Netzwerkanalyse mit Wärmequellen am weitesten verbreitet ist.

Die Finite-Elemente-Methode wird in der Regel nur zur Berechnung von ausgewählten Komponenten der Maschine eingesetzt, allerdings unter Vorgaben der Randbedingungen aus den Netzwerkberechnungen.

Wegen des großen Aufwandes werden die vollständigen 3-D-Simulationen nur zur Demonstration der Strömungsverläufe durchgeführt und sind aus heutiger Sicht für die Auslegung von Maschinen noch nicht geeignet.

---

## Kapitel 2 Ziel der Arbeit

Die Steigerung der Einheitsleistung von großen elektrischen Maschinen und die hieraus resultierende Reduzierung der Kosten lassen sich effektiv nur durch die Erhöhung der Stromdichten in den Stator- und Rotorwicklungen erreichen. Diese kann nur dann realisiert werden, wenn gleichzeitig die Effizienz der Kühlungssysteme so verbessert wird, dass die hierdurch entstehenden Zusatzverluste wirksam abgeführt werden können.

In dieser Arbeit soll ein neues Verfahren zur Berechnung der Volumenstromverteilung des Kühlgases in elektrischen Maschinen großer Leistung entwickelt werden. Das Verfahren soll die beiden, bisher getrennt angewandten Berechnungsarten, nämlich die Netzwerktheorie mit den Wärmequellen sowie die CFD-Methode, miteinander verknüpfen und die jeweiligen Vor- bzw. Nachteile der beiden Verfahren so auszunutzen, dass schließlich eine verbesserte Genauigkeit bei der Berechnung der Kühlgasverteilung erreicht wird.

Die Basis der Berechnung soll weiterhin die klassische Netzwerktheorie bilden, deren Widerstände für einfache geometrische Anordnungen aus analytischen Gleichungen oder aus Messungen an Mustern bestimmt werden. Darüber hinaus sollen die Widerstandskennlinien von geometrisch sehr komplexen Maschinenbereichen, wie z. B. Ständerwickelkopf oder Luftkanalbohrungen im Rotor mit Hilfe von 3-D-FE-Simulationen berechnet und in das Netzwerkprogramm integriert werden. Da diese Bereiche bisher nur grob erfasst und häufig nur durch typenspezifische Messungen abgeglichen wurden, sind durch ihre verbesserten FE-Berechnungen deutlich genauere Ergebnisse zu erwarten.

Für die Auslegung der Maschinen ergeben sich hierdurch weitere wichtige Erkenntnisse, weil gerade die detailliert betrachteten Bereiche bei aktuellen Konstruktionen die mögliche Leistungserhöhung begrenzen.

Das Netzwerk soll mit Hilfe des kommerziellen Programms Flowmaster modelliert und gelöst werden, welches speziell für räumliche Netzwerkstrukturen mit konzentrierten Komponenten entwickelt wurde. Es erlaubt, die stationäre und transiente Volumenstromverteilung von Fluiden zu bestimmen, wobei die Struktur des Netzwerkes frei generiert werden kann. Die 3-D-FE-Analyse der ausgewählten Maschinenbereiche soll mit Hilfe des Programmes ANSYS-Fluent durchgeführt werden.

Die hierbei erhaltenen Ergebnisse sollen mit denen aus der klassischen Netzwerk-Berechnung verglichen werden. Darüber hinaus sollen durch die Parameterstudie für besonders einflussreiche Maschinenbereiche die grundsätzlichen funktionellen Abhängigkeiten aufgestellt werden, die dann bei der Untersuchung von anderen Maschinenarten verwendet werden können.

---

# Kapitel 3 Theoretische Grundlagen

## 3.1 Die Hauptsätze der Thermodynamik

Die Wärmeübertragung kann grundsätzlich auf drei unterschiedlichen Wegen erfolgen: durch Wärmeleitung, durch Wärmestrahlung oder durch Konvektion. Beim Turbogenerator geschieht die Wärmeübertragung überwiegend durch Wärmeleitung und durch Konvektion [22]. Die hierbei geltenden Abhängigkeiten lassen sich aus zwei der drei Hauptsätzen der Thermodynamik, dem Massenerhaltungssatz und dem Energieerhaltungssatz ableiten.

Sie lassen sich mathematisch wie folgt formulieren:

### 1. Massenerhaltungssatz

Die zeitliche Abnahme der im Volumen  $V$  eingeschlossenen Masse ist gleich der durch die Fläche, die dieses Volumen einschließt, nach außen abtransportierten Masse.

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV + \int_{\partial V} \rho \cdot c dA = 0. \quad (3.1)$$

Diese Gleichung gilt für ein ruhendes, offenes System mit dem Volumen  $V$ .

Es bedeuten:  $\rho$  die Dichte,  $c$  die Strömungsgeschwindigkeit und  $A$  die Fläche.

Wenn das Oberflächenintegral insgesamt positiv ist, wird die Masse aus dem Volumen in die Umgebung transportiert.

### 2. Energieerhaltungssatz

Die Änderung der inneren Energie des Systems ist gleich der Differenz zwischen der dem System zugeführten und der aus dem System ausgetretenen Energie:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \cdot u dV + \int_{\partial V} \rho \cdot \left( u + \frac{P}{\rho} \right) \cdot c dA = - \int_{\partial V} \dot{q} dA + \int_V \dot{\omega} dV \quad (3.2)$$

Es bedeuten:

$h \equiv u + \frac{P}{\rho}$  : Enthalpie (innere Energie plus Volumenänderungsarbeit),

$P$  : Luftdruck

$\dot{\omega}$  : Leistungsdichte der Wärmequelle

$u$  : Energiedichte

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \Delta \dot{h} = \dot{Q} + \dot{\Omega} \quad (3.3)$$

---

$\Delta h$  : Differenz der Enthalpie-Ströme

$\dot{\Omega}$  : Gesamte Energie im Volumen

$\dot{Q}$  : Wärmestrom

$t$  : Zeit

Es gibt zwei spezifische Wärmekapazitäten:

$$c_V \equiv \left( \frac{\partial u}{\partial T} \right)_V \quad \text{für konstantes Volumen } V \quad (3.4)$$

$$c_P \equiv \left( \frac{\partial h}{\partial T} \right)_P \quad \text{für konstanten Druck } P \quad (3.5)$$

$T$ : Temperatur.

### 3.2 Wärmeleitung

Durch eine Platte der Dicke  $\Delta x$  und der Fläche  $A$  fließt bei unterschiedlichen Temperaturen ( $T_1, T_2$ ) auf beiden Seiten der Platte im Zeitintervall  $\Delta t$  eine Wärme  $Q$ :

$$Q = \lambda \cdot \frac{T_1 - T_2}{\Delta x} \cdot A \cdot \Delta t \quad (3.6)$$

$\lambda$  : Wärmeleitfähigkeit

Für den Wärmestrom  $\dot{Q}$  gilt:

$$\dot{Q} = \lambda \cdot \frac{T_1 - T_2}{\Delta x} \cdot A \quad (3.7)$$

Für eine eindimensionale Anordnung lässt sich nach Anwendung des Fourierschen Gesetzes die Wärmestromdichte  $\dot{q}_x$  direkt bestimmen:

$$\dot{q}_x = \frac{d\dot{Q}_x}{dA} = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \quad (3.8)$$

Wendet man den Energieerhaltungssatz auf ein Volumenelement an, dann müssen die aus der Wärmequelle zugeführte Energie und der Anstieg der inneren Energie gleich sein, wenn keine Änderung der kinetischen und potentiellen Energie stattfindet:

$$\Delta U = \Delta Q \quad (3.9)$$

Die Änderung der inneren Energie  $\Delta U$  kann wie folgt dargestellt werden:

$$\Delta U = \rho \cdot c \cdot \Delta T \cdot dV \quad (3.10)$$

$dV = dx \cdot dy \cdot dz$  : Volumenelement

$c$  : Wärmekapazität

Wird vorausgesetzt, dass der Wärmestrom  $\dot{Q}_{\partial V, x}$  aus der Wärmequelle durch die Wärmeleitung am Rand ab- oder zugeführt wird und im betrachteten Kontrollraum die Wärmequellendichte  $\dot{\omega}$  vorhanden ist, so ergibt sich für die Änderung der Wärmeenergie:

$$\Delta Q = (\dot{Q}_{\partial V, x} + \dot{\omega} \cdot dV) \cdot \Delta t \quad (3.11)$$

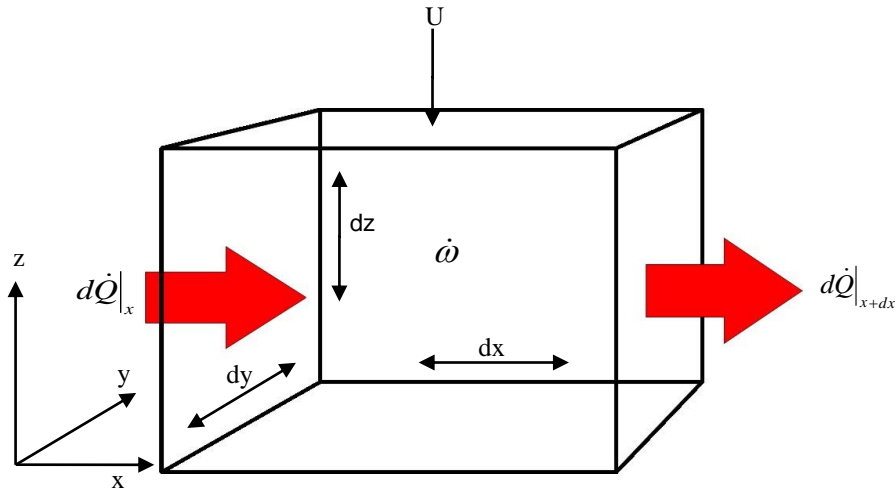


Abbildung 3.1: Wärmeleitung durch ein Volumenelement in x-Richtung [22]

Wie in Abbildung 3.1 angedeutet, wird die Wärmeleitung in x-Richtung über den Rand  $\partial V$  als Produkt der Wärmestromdichte  $\dot{q}_x$  in x-Richtung und auf der Stirnfläche  $dy, dz$  des Volumens berechnet:

$$\dot{Q}_{\partial V, x} = \dot{q}_{x|x} dydz - \dot{q}_{x|x+dx} dydz \quad (3.12)$$

Nach der Taylor-Entwicklung der Wärmestromdichte  $\dot{q}_x$  bezüglich der x-Komponente ergibt sich:

$$\dot{q}_{x|x+dx} = \dot{q}_{x|x} + \frac{\partial \dot{q}_x}{\partial x} \Big|_x \cdot x + \frac{\partial^2 \dot{q}_x}{\partial x^2} \Big|_x \cdot \frac{x^2}{2} + \dots \quad (3.13)$$

Werden die Ableitungen der zweiten und höheren Ordnungen vernachlässigt, so vereinfacht sich die Gleichung für die Wärmestromdichte  $\dot{q}_x$  zu:

$$\dot{Q}_{\partial V, x} = (\dot{q}_{x|x} - \dot{q}_{x|x+dx}) dydz = -\frac{\partial \dot{q}_x}{\partial x} \Big|_x dx dy dz \quad (3.14)$$

Wie schon erwähnt, müssen die Energiezufuhr  $\Delta Q$  und die Änderung der inneren Energie  $\Delta U$  gleich sein:



---


$$\Delta U = \Delta Q$$

oder ausgeschrieben

$$\rho c \Delta T dV = (\dot{Q}_{\text{div},x} + \dot{w} \cdot dV) \Delta t.$$

Unter der Annahme, dass

$$\frac{\Delta T}{\Delta t} = \frac{\partial T}{\partial t} \text{ und } dV = dx \cdot dy \cdot dz, \text{ erhält man}$$

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{\partial \dot{q}_x}{\partial x} + \dot{w}. \quad (3.15)$$

Wendet man in der Gleichung (3.15) das Fourier'sche Gesetz (3.8) an

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \dot{w}$$

und berücksichtigt, dass  $\lambda$  unabhängig vom Ort ist, so vereinfacht sich die DGL zu

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \dot{w}. \quad (3.16)$$

Nach Ausführung der Differentiation nach  $\partial x$  erhält man schließlich

$$\frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\dot{w}}{\lambda}. \quad (3.17)$$

Aus der DGL (3.17) folgt eine Definition der Temperaturleitfähigkeit  $a$

$$a = \frac{\lambda}{\rho \cdot c}. \quad (3.18)$$

Werden die Formeln (3.15) und (3.16) kombiniert, so ergibt sich:

$$-\frac{\partial \dot{q}_x}{\partial x} = \lambda \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)$$

Durch Integration beider Seiten erhält man die bekannte Newton'sche Gleichung für die Wärmestromdichte

$$\dot{q}_x = -\lambda \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right). \quad (3.19)$$

Sie beschreibt den Warmestromubergang zwischen einem festem Körper und dem umgebenden Fluid.

Die Wärmestromdichte  $\dot{q}_x$  ist proportional zu der Temperaturdifferenz und dem Wärmeübergangskoeffizient

$$\dot{q}_x = \alpha \cdot (T_w - T_\infty). \quad (3.20)$$

---

mit  $\alpha$  : W ä r m e ü b e r g a n g s k o e f f i z i e n t

$T_w$  : W a n d t e m p e r a t u r

$T_\infty$  : U m g e b u n g s t e m p e r a t u r .

Wird diese Abh ä n g i g k e i t i n d i e G l e i c h u n g (3.19) s o f o l g t s c h l i e ß l i c h d i e R a n d b e d i n g u n g d e r d r i t t e n A r t d e r W ä r m e ü b e r t r a g u n g

$$\alpha \cdot (T_w - T_\infty) = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} . \quad (3.21)$$

Der W ä r m e ü b e r g a n g s k o e f f i z i e n t  $\alpha$  h ä n g t v o n d e r G e o m e t r i e u n d d e r G e s c h w i n d i g k e i t s - u n d T e m p e r a t u r v e r t e i l u n g i m F l u i d a b .

### 3.3 Konvektion

Im folgenden Kapitel werden die theoretischen Grundlagen der W ä r m e ü b e r t r a g u n g d u r c h K o n v e k t i o n d a r g e s t e l l t . E i n w e s e n t l i c h e r A n t e i l d e s W ä r m f l u s s e s i n e l e k t r i s c h e n M a s c h i n e n f i n d e t ü b e r d i e K o n v e k t i o n s t a t t .

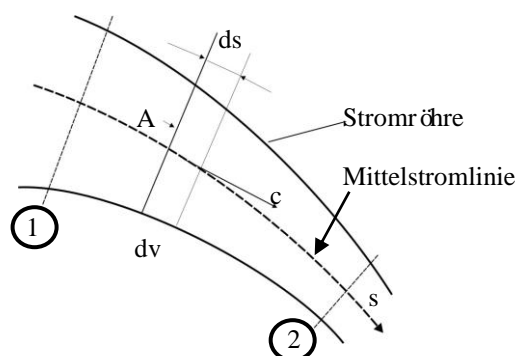
#### 3.3.1 Die Strömungsgeschwindigkeit und der Massestrom

Im allgemeinen Fall wird die Strömungsgeschwindigkeit  $c$  nicht für ein einzelnes Teilchen betrachtet, sondern als mittlere Geschwindigkeit  $\bar{c}$  über dem Strömungsquerschnitt [24]

$$\bar{c} = \frac{1}{A} \int_{(A)} c \cdot dA . \quad (3.22)$$

Es gibt zwei Theorien, die die Strömungsmechanismen von Gas beschreiben: die Lagrang'sche und die Euler'sche Theorie. Bei der Lagrang'schen Betrachtung liegt der Schwerpunkt auf der Analyse des Verhaltens einzelner Teilchen. Dies führt aber zu einem erheblichen mathematischen Aufwand, weshalb diese Methode nur in seltenen Fällen angewendet wird.

In den meisten Fällen wird die Gasströmung mit Hilfe der Euler'schen Theorie beschrieben. Bei festgelegten Koordinaten wird die mittlere Geschwindigkeit  $c = f(s, t)$  von den Teilchen analysiert, die sich an dem betrachteten Ort ( $s$ ) befinden.



**Abbildung 3.2: Volumenströme durch Stromröhre, Querschnitt A immer senkrecht zur Mittelstromlinie [24]**

Das an der Oberfläche des Festkörpers strömende Gas verändert die Temperatur der Oberfläche. Die hierdurch zu- oder abgeführte Wärmeenergie muss daher bei der Analyse des Wärmeflusses einer Anordnung miterfasst werden.

Die Grundlage für die mathematische Beschreibung dieses Phänomens liefert die Kontinuitätsgleichung

$$dV_{aus} - dV_{ein} = \left( \left( c_x + \frac{\partial c_x}{\partial x} dx \right) dt dy dz + \left( c_y + \frac{\partial c_y}{\partial y} dy \right) dt dz dx + \left( c_z + \frac{\partial c_z}{\partial z} dz \right) dt dx dy \right) - (c_x dt dy dz + c_y dt dz dx + c_z dt dx dy) = 0.$$

mit

$$\frac{\partial c_x}{\partial x} + \frac{\partial c_y}{\partial y} + \frac{\partial c_z}{\partial z} = 0. \quad (3.23)$$

$c_x, c_y, c_z$ : Komponenten der Strömungsgeschwindigkeit

Diese Gleichung besagt, dass in einem raumfesten Volumen, das durch eine Strömung durchgeströmt wird, der einströmende Strom gleich dem ausströmenden Strom ist.

Aus der Kontinuitätsgleichung können direkt die Strömungsgeschwindigkeit und der Massenstrom abgeleitet werden.

Der Volumenstrom des strömenden Gases  $\dot{V}$  lässt sich als Produkt der Fläche und der Strömungsgeschwindigkeit bestimmen:

$$\dot{V} = \frac{dV}{dt} = A \cdot \frac{ds}{dt} = A \cdot c \quad (3.24)$$

$$c = \frac{ds}{dt} = \frac{d\dot{V}}{dA}$$

Mit  $ds$  wird die Distanzeinheit und mit  $c$  die Strömungsgeschwindigkeit bezeichnet.

Wenn die Dichte der Strömung konstant ist, lässt sich der Massestrom direkt angeben

$$\dot{m} = \frac{d}{dt} f(\rho, V) = \rho \cdot \frac{dV}{dt} = \rho \cdot c \cdot A. \quad (3.25)$$

### 3.3.2 Strömungsformen

Die reale Strömung kann zwei unterschiedliche Strömungsformen annehmen:

1. Die Schichtströmung, auch laminare Strömung genannt
2. Die Wirbelströmung, auch turbulente Strömung genannt

---

Die beiden Strömungsformen unterscheiden sich nicht nur in ihrer Erscheinungsform, sondern auch in ihrer Eigenschaft. Die jeweilige Strömungsgeschwindigkeit hat hierbei großen Einfluss auf die Strömungsformen.

Bei der Schichtströmung bewegen sich die Strömungsteilchen in den unterschiedlichen nebeneinander fließenden Schichten, die sich untereinander nicht vermischen. Wenn die Strömungsgeschwindigkeit ansteigt, konvertiert die Schichtströmung zur Wirbelströmung. Bei der Wirbelströmung bewegen sich die Teilchen unregelmäßig, die geordnete Bewegung und unregelmäßige Bewegung der Teilchen überlappen sich miteinander. Es handelt sich um einen statistischen Vorgang. Eine Schwankung in Quer- und Längsrichtung tritt auf, bis sich diese Schwankung in Wärme umgewandelt hat. Ohne neue Einströmung schwächt sich die turbulente Strömung wegen der Wirkung der Viskosität ab. Die Aufrechterhaltung der Wirbelströmung erfolgt oft durch die Reibung an den Grenzflächen des Strömungsfeldes. Dort entstehen viele kleine Wirbel.

Die Erscheinung der Wirbelströmung aus mikroskopischer Sicht ist die Folge des Impulsaustausches zwischen den Masseteilchen. Die mechanische Energie wandelt sich hierbei in Wärme um. Die Stöße zwischen den Teilchen und den Begrenzungen verursacht ebenfalls die Umwandlung in Wärme. Diese wird durch einen zusätzlichen Strömungswiderstand, die sogenannte Scheinreibung, erfaßt. Um diesen Widerstand zu quantifizieren, wird die sog. scheinbare Viskosität eingeführt.

Zur mathematischen Beschreibung der Strömungsformen werden wichtige Kennzahlen verwendet, die nachfolgend definiert werden:

Reynolds-Zahl :

$$\text{Re} = \frac{c \cdot D}{\nu} \quad (3.26)$$

$D$ : Durchmesser des Kreisrohrs bzw. äquivalenter Durchmesser bei beliebigen Querschnitten

$\nu$ : kinematische Viskosität ( $\nu = \frac{\eta}{\rho}$ )

$c$ : Strömungsgeschwindigkeit

Die Größe der Reynolds-Zahl stellt für die jeweilige Flüssigkeit ein Kriterium dar, das darüber entscheidet, welche Strömungsformen sich ausbilden können.

Schubspannung

Bei einer relativen Bewegung der Strömungsschichten zueinander entsteht an der Kontaktfläche die Schubspannung  $\tau_t$ , die eine Turbulenz verursacht

$$\tau_t = \eta_t \frac{\partial c}{\partial n} \quad (3.27)$$

---

Es bedeuten:

$\eta_i$  die scheinbare Viskosität,

$\frac{\partial c}{\partial n}$  die Normalkomponente der Strömungsgeschwindigkeit  $c$  und  $n$  die Normalrichtung.

Die scheinbare Viskosität spiegelt die Stärke des Impulsaustausches wider. Deswegen ist der Strömungswiderstand bei einer Wirbelströmung erheblich größer als der Widerstand bei einer Schichtströmung. Welche Strömungsform sich ausbilden wird hängt ab von:

- der kritischen Geschwindigkeit  $c$ ,
- der Dichte und der dynamischen Viskosität der Strömung sowie
- den geometrischen Abmessungen.

### Grenzschichtdicke $\delta$

Als Grenzschichtdicke wird der Abstand zur Wand bezeichnet, an dem die Strömungsgeschwindigkeit 99% des Betrags der Außenströmung erreicht (siehe Abbildung 3.3).

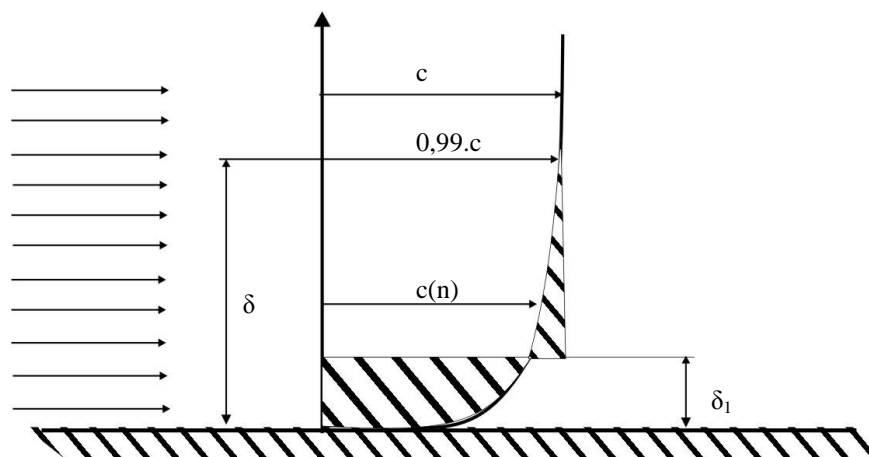


Abbildung 3.3: Definition der Grenzschichtdicke  $\delta$  [24]

In der Regel gilt, dass der Wärmeübertragungskoeffizient  $\alpha$  von den thermischen Grenzschichtdicken  $\delta$  abhängig ist

$$\alpha \sim \frac{1}{\delta}. \quad (3.28)$$

Wenn die Grenzschichtdicke abnimmt, steigt die Temperatur in der Nähe der Wand erheblich schneller an. Daher muss eine Analyse der Geschwindigkeitsverteilung der Strömung durchgeführt werden.

Außer der vorher schon behandelten Reynoldszahl spielen weitere Kennzahlen bei der Kopplung zwischen der Wärme- und der Strömungslehre eine wichtige Rolle.

### Prandtl-Zahl (Pr)

In Formel (3.18) werden die Temperaturleitfähigkeit  $a$  und die kinematische Viskosität  $\nu$  bereits definiert. Um das Verhältnis von Impuls zu Wärmetransport in der reibungsbehafteten Strömung zu charakterisieren, wird die Prandtl-Zahl bestimmt

$$Pr = \frac{\nu}{a}. \quad (3.29)$$

### Nußelt-Zahl (Nu)

Die Nußelt-Zahl stellt die Kopplung zwischen der Wärme- und der Strömungslehre her

$$Nu = \frac{\alpha \cdot L}{\lambda}. \quad (3.30)$$

mit  $\alpha$ : Wärmeübertragungskoeffizient,

$L$ : Charakteristische Länge der Umströmung und

$\lambda$ : Wärmeleitfähigkeit.

Sie kann aus der sogenannten Korrelation von Reynolds- und Prandtlzahl bestimmt werden [22]

$$Nu = Pr^{1/3} (0,037 Re_L^{0,8} - 871). \quad (3.31)$$

Ihre Größe wird wesentlich durch die betrachtete Geometrie geprägt.

Mit den vorstehend definierten Kenngrößen kann ausgehend von der Geschwindigkeitsverteilung der Strömung nun die Temperaturverteilung gefunden werden. Die Vorgehensweise lässt sich anhand des folgenden Ablaufschemas erklären:

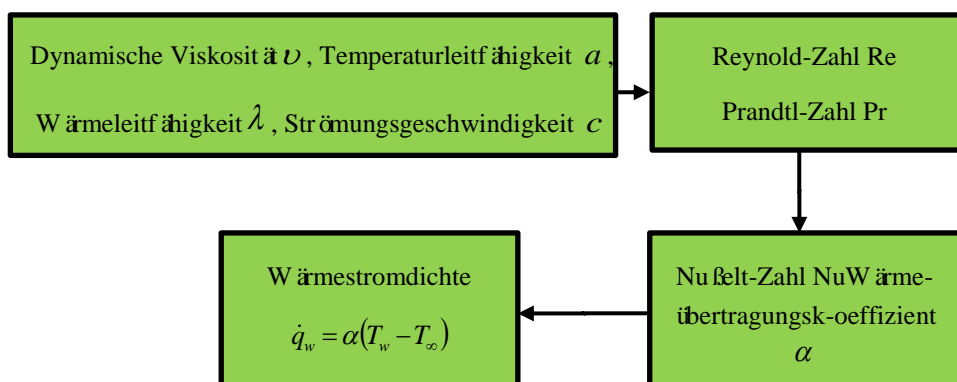


Abbildung 3.4: Schematische Darstellung der Berechnung der Temperaturverteilung [22]

Ausgehend von den bekannten Einflussgrößen: Kühlströmungsgeschwindigkeit  $c$ , charakteristische Länge  $L$ , kinematische Viskosität  $\nu$  und Temperaturleitfähigkeit  $a$  werden die Reynolds- und die Prandtl-Zahl berechnet. Im nächsten Schritt werden die Nußelt-Zahl und

der Wärmeübertragungskoeffizient  $\alpha$  bestimmt. Mit seiner Hilfe lässt sich für die bekannte Temperaturdifferenz  $T_w - T_\infty$  die Wärmestromdichte bestimmen (Gleichung 3.30).

Die Gleichungen von Navier-Stokes beschreiben die durch alle wirkenden Kräfte verursachte allgemeine Bewegung realer Fluide. Sie erweitern die Euler'schen Gleichungen, welche die Bewegung des idealen Fluides analytisch darstellen.

Die Navier-Stokes-Gleichungen bilden ein gekoppeltes System von partiellen Differenzialgleichungen zweiter Ordnung:

$$\begin{aligned} \rho \left( \frac{\partial c_x}{\partial t} + c_x \cdot \frac{\partial c_x}{\partial x} + c_y \cdot \frac{\partial c_x}{\partial y} + c_z \cdot \frac{\partial c_x}{\partial z} \right) &= f_x - \frac{\partial P}{\partial x} + \eta \left( \frac{\partial^2 c_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 c_x}{\partial z^2} \right) \\ \rho \left( \frac{\partial c_y}{\partial t} + c_x \cdot \frac{\partial c_y}{\partial x} + c_y \cdot \frac{\partial c_y}{\partial y} + c_z \cdot \frac{\partial c_y}{\partial z} \right) &= f_y - \frac{\partial P}{\partial y} + \eta \left( \frac{\partial^2 c_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 c_y}{\partial z^2} \right) \\ \rho \left( \frac{\partial c_z}{\partial t} + c_x \cdot \frac{\partial c_z}{\partial x} + c_y \cdot \frac{\partial c_z}{\partial y} + c_z \cdot \frac{\partial c_z}{\partial z} \right) &= f_z - \frac{\partial P}{\partial z} + \eta \left( \frac{\partial^2 c_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 c_z}{\partial z^2} \right) \end{aligned} \tag{3.32}$$

Die Größe  $\vec{f}$  ist die spezifische Volumenkraft (Massenkraft), die in der Regel als Gewichtskraft angesehen wird.

$P$ : Gasdruck

Die Navier-Stokes Gleichungen sind analytisch nicht lösbar.

Die numerische Fluidmechanik ermöglicht durch Einsatz geeigneter Computerprogramme eine sehr gute Näherungslösung der Gleichungen.

Durch Lösen des gesamten Gleichungssystems ergeben sich die gesuchten Werte der Variablen an den Knotenpunkten des gewählten Gittersystems [23].

### 3.3.3 Strömungswiderstand

Die Geschwindigkeit der Strömung wird maßgeblich durch den Strömungswiderstand beeinflusst. Im folgenden Abschnitt werden die wichtigsten Schritte zur Bestimmung dieses Widerstandes kurz erläutert.

Ausgangspunkt ist das Newton'sche Grundgesetz für die Kräfte, die auf die Teilchen einwirken, siehe Abbildung 3.5:

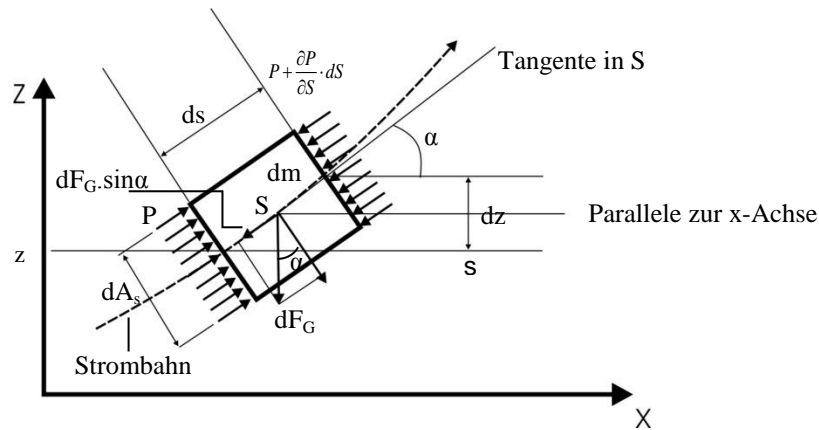


Abbildung 3.5: Kräfte auf die Strömungsteilchen in der Bahn s [24]

Für die an ein Strömungsteilchen angreifenden Kräfte gilt:

$$\sum dF_s = dm \cdot \dot{c} = dm \cdot \frac{dc}{dt} = \rho \cdot dA_s \cdot ds \cdot \frac{dc}{dt} \quad (3.33)$$

Beachtet man, dass der Druck auf die Strömungsteilchen sich entlang der Bahn verändert, so erhält man für die resultierende Kraft:

$$\sum dF_s = p \cdot dA_s - \left( p + \frac{\partial p}{\partial s} \cdot ds \right) dA_s - dF_G \cdot \sin \alpha \quad (3.34)$$

Mit  $dF_G = \rho \cdot g \cdot dA_s \cdot ds$  wird die auf die Teilchen wirkende Schwerkraft berücksichtigt.

Werden nun die Gleichungen (3.33) und (3.34) gleichgesetzt, so ergibt sich mit  $\sin \alpha = \frac{\partial z}{\partial s}$  zunächst

$$g \cdot \frac{\partial z}{\partial s} ds + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial s} ds + ds \cdot \frac{dc}{dt} = 0. \quad (3.35)$$

z: die Höhe der Strömungsteilchen

und nach der Multiplikation mit  $\frac{\partial s}{ds}$

$$g \cdot \partial z + \frac{1}{\rho} \partial p \cdot \partial s + \partial s \cdot \frac{dc}{dt} = 0. \quad (3.36)$$

Da die Strömungsgeschwindigkeit c eine Funktion des Ortes s und der Zeit t ist, folgt daraus:

$$dc = \frac{\partial c}{\partial s} \cdot ds + \frac{\partial c}{\partial t} \cdot dt$$

Hieraus kann direkt die Beschleunigung



$$\dot{c} = \frac{dc}{dt} = \frac{\partial c}{\partial s} \cdot \frac{ds}{dt} + \frac{\partial c}{\partial t} = c \cdot \frac{\partial c}{\partial s} + \frac{\partial c}{\partial t}$$

berechnet werden.

Nach der Erweiterung mit  $\partial s$  ergibt sich

$$\partial s \cdot \frac{dc}{dt} = c \cdot \partial c + \partial s \cdot \frac{\partial c}{\partial t} = \partial \left( \frac{c^2}{2} \right) + \frac{\partial c}{\partial t} \cdot \partial s.$$

Wird dieser Term in die Gleichung (3.35) eingesetzt, so ergibt sich schließlich die bekannte Euler'sche Strömungsgleichung, die eine nichtstationäre eindimensionale Strömung in Stromlinierrichtung beschreibt

$$g \cdot \partial z + \frac{1}{\rho} \cdot \partial p + \partial \left( \frac{c^2}{2} \right) + \frac{\partial c}{\partial t} \cdot \partial s = 0. \quad (3.37)$$

Im stationären Zustand ist die Geschwindigkeit von der Zeit unabhängig

$$g \cdot \partial z + \frac{1}{\rho} \cdot \partial p + \partial \left( \frac{c^2}{2} \right) = g \cdot dz + \frac{1}{\rho} \cdot dp + c \cdot dc = 0. \quad (3.38)$$

Nach der Integration von (3.38) ergibt sich folgendes:

$$\int (g \cdot dz) + \int \frac{1}{\rho} \cdot dp + \int c \cdot dc = konst \quad (3.39)$$

folgt

$$z + \frac{p}{\rho \cdot g} + \frac{c^2}{2g} + u = konst. \quad (3.40)$$

Diese Gleichung wurde erstmalig von Daniel Bernoulli hergeleitet und ist unter seinem Namen in der Literatur bekannt. Sie stellt den Zusammenhang zwischen den unterschiedlichen Energieformen in der Strömung dar. Die ersten drei Summanden repräsentieren die mechanische und der vierte Summand die thermische Energie  $u$ .

### 3.3.4 Innere Strömung

Nachfolgend wird die innere laminare Strömung in einem Rohr näher betrachtet.

Bei einer realen Strömung entstehen aufgrund von Wirbeln (Turbulenzen) Reibungsverluste. Diese in Wärme umgesetzte Energie wird als Dissipation  $Y_v$  bezeichnet. Anhand der Energiebilanz muss die Summe der Energie am Abgang  $z_1$  gleich der am Zugang  $z_2$  sein. Die Energiegleichung (3.38) muss um diese Reibungsverluste erweitert werden, siehe Abbildung 3.6.

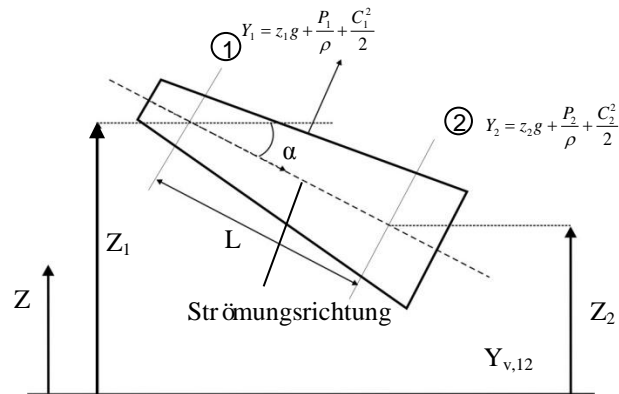


Abbildung 3.6: Innere Strömung [24]

Hiernach ergibt sich die Energiebilanz

$$z_1 \cdot g + \frac{p_1}{\rho} + \frac{c_1^2}{2} = z_2 \cdot g + \frac{p_2}{\rho} + \frac{c_2^2}{2} + Y_{v,12} \quad (3.41)$$

Unter der Annahme, dass  $c_1 = c_2$  und  $\frac{(z_1 - z_2)}{L} = \sin \alpha$  ergibt sich:

$$L \cdot \sin \alpha \cdot g + \frac{p_1 - p_2}{\rho} = Y_{v,12}$$

und nach Umformen

$$\frac{Y_{v,12}}{L} = g \left( \sin \alpha + \frac{p_1 - p_2}{\rho \cdot g \cdot L} \right) = g \cdot J_{12} \quad (3.42)$$

$g \cdot J_{12}$  wird in der Literatur als Energiegefälle definiert.

Im Fall einer horizontalen Rohrleitung mit  $\alpha = 0$  vereinfacht sich der Ausdruck zu

$$Y_{v,12} = \frac{p_1 - p_2}{\rho} = \frac{\Delta p_{v,12}}{\rho} \quad (3.43)$$

Hieraus geht hervor, dass die in Wärme umgesetzte Energie zum Druckverlust direkt proportional ist.

Für die Bestimmung des Rohrleitungswiderstandes wird noch eine weitere charakteristische Größe, die sog. Rohrreibungszahl benötigt.

Diese wird nachfolgend für ein zylinderförmiges Rohrstück abgeleitet, wobei angenommen wird, dass eine Schichtströmung vorliegt.

Im stationären Fall tritt ein Gleichgewicht der Kräfte in der Strömungsrichtung auf. Die Komponenten der Kräfte setzen sich aus der Gewichtskraft  $F_t$  in der Strömungsrichtung, den Druckkräften  $F_{p1}$ ,  $F_{p2}$  und den Widerstandkräften durch Reibung  $F_w$  zusammen, siehe Abbildung 3.7.

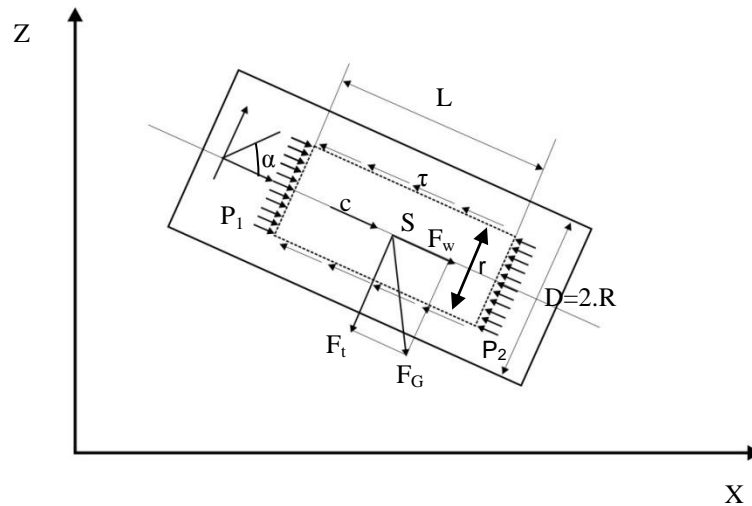


Abbildung 3.7: Kräfte in der Strömungsrichtung in einem Zylinder mit dem Radius  $r$  und der Länge  $L$  [24]

Die einwirkenden Kräfte lassen sich mit den in Abbildung 3.7 eingetragenen Bezeichnungen wie folgt ausdrücken:

- Komponente der Gewichtskraft:  $F_t = \rho \cdot g \cdot \pi \cdot r^2 \cdot L \cdot \sin \alpha$
- Druckkräfte an der Stelle 1:  $F_{p1} = p_1 \cdot \pi \cdot r^2$
- Druckkräfte an der Stelle 2:  $F_{p2} = p_2 \cdot \pi \cdot r^2$
- Widerstandskraft:  $F_w = \tau \cdot A = -\eta \cdot \frac{dc}{dr} \cdot 2 \cdot r \cdot \pi \cdot L$  (Gleichung 3.27).

Aus der Forderung des Gleichgewichts aller einwirkenden Kräfte

$$F_t + F_{p,1} - F_{p,2} - F_w = 0.$$

erhält man nach einer Umstellung

$$\frac{2\eta}{\rho} \frac{dc}{dr} + g \cdot r \left( \sin \alpha + \frac{p_1 - p_2}{\rho \cdot g \cdot L} \right) = 0.$$

Mit  $\frac{Y_{v,12}}{L} = g \left( \sin \alpha + \frac{P_1 - P_2}{\rho \cdot g \cdot L} \right)$  (Gleichung 3.43) und  $\nu = \frac{\eta}{\rho}$

ergibt sich eine einfache DGL für eine Schichtströmung im Zylinder:

$$2 \cdot \nu \cdot \frac{dc}{dr} + \frac{Y_{V,12}}{L} \cdot r = 0 \quad (3.44)$$

Nach Berücksichtigung der Randbedingung  $c = 0$  für  $r = R$ , lässt sich die Geschwindigkeitsverteilung über den Rohrradius bestimmen:

$$c(r) = \frac{Y_{V,12}}{4 \cdot \nu \cdot L} (R^2 - r^2) \quad (3.45)$$

Die maximale Strömungsgeschwindigkeit  $c_{\max}$  tritt auf der Rohrachse auf, sie lässt sich direkt aus Gleichung 3.45 berechnen. Für  $r = 0$  ergibt sich:

$$c_{\max} = \frac{Y_{V,12}}{4 \cdot \nu \cdot L} \cdot R^2 = \frac{Y_{V,12}}{16 \cdot \nu \cdot L} \cdot D^2 \quad (3.46)$$

Es bedeuten:

$Y_{V,12}$ : Energiegefälle;  $\nu$ : dynamische Viskosität;  $D$ : Durchmesser und  $L$ : Länge des Rohres.

In der folgenden Gleichung wird gezeigt, dass der Volumenstrom im Kreisrohr  $\dot{V} = A \cdot \bar{c}$  gleich dem Produkt aus der mittleren Geschwindigkeit und der Fläche  $A$  ist. Analog lässt sich nach Einsetzen der Gleichung 3.45 der Volumenstrom wie folgt angeben:

$$\dot{V} = \int_A d\dot{V} = \int_0^R 2r \cdot \pi \cdot c(r) \cdot dr = \frac{\pi}{8} \cdot \frac{Y_{V,12}}{\nu \cdot L} \cdot R^4 = \pi \cdot R^2 \cdot \bar{c} \quad (3.47)$$

Bei laminaren Strömungen beträgt die mittlere Geschwindigkeit anhand der Gleichung (3.46)

$$c_{\max} = \frac{Y_{v,12}}{4 \cdot \nu \cdot L} \cdot R^2$$

$$\bar{c} = \frac{1}{2} c_{\max}$$

$$\bar{c} = \frac{Y_{v,12}}{8 \cdot \nu \cdot L} \cdot R^2$$

Hieraus kann schließlich die in Wärme umgesetzte Energie bestimmt werden

$$Y_{V,12} = \frac{32 \cdot \bar{c} \cdot \nu \cdot L}{D^2} = 64 \cdot \frac{\nu}{\bar{c} \cdot D} \cdot \frac{L}{D} \cdot \frac{\bar{c}^2}{2} \Rightarrow Y_{V,12} = \frac{64}{\text{Re}} \cdot \frac{L}{D} \cdot \frac{\bar{c}^2}{2} \quad (3.48)$$

Diese Gleichung wird in der Literatur als Hagen-Poiseuillesches Gesetz bezeichnet. Die Größe  $\lambda_{re} = \frac{64}{\text{Re}}$  wird als die Rohrreibungszahl definiert.

---

### 3.3.5 Turbulente Strömung im Rohr

Wenn die Strömungsgeschwindigkeit eines laminaren Strömungsfeldes zunimmt, wird die ursprünglich stabile laminare Strömung instabil. Bei der turbulent gewordenen Strömung überlagern sich der geordneten Grundströmung in die ungeordneten stochastisch zufallsbedingten Schwankungsbewegungen in Quer- und Längsrichtung (Strömungsrichtung). Diese führten zu Mischungsverlusten, die fast immer wesentlich größer als die gleichzeitig vorhandenen Newton'schen Reibungsverluste sind.

Anders als bei der laminaren Strömung wird die Rohrreibungszahl durch Experimente ermittelt und durch Erfahrungswerte abgesichert. Hiernach hängt die Widerstandskraft von der Rohroberfläche und der kinematischen Energie der Strömungsart ab. Mit dem Proportionalitätsfaktor  $\Psi$  ergibt sich:

$$F_w = \Psi \cdot \pi \cdot D \cdot L \cdot \rho \cdot c^2 / 2$$

und gemäß der Gleichung (3.43) ohne Berücksichtigung der Gewichtskraft

$$F_w = \Delta P_v \cdot D^2 \cdot \pi / 4 = \rho \cdot Y_{v,12} \cdot D^2 \cdot \pi / 4 .$$

Werden beide Gleichungen kombiniert, so erhält man:

$$\Psi \cdot \pi \cdot D \cdot L \cdot \rho \cdot c^2 / 2 = \rho \cdot Y_{v,12} \cdot D^2 \cdot \pi / 4$$

Hieraus läßt sich die in Wärme umgesetzte Energie bestimmen

$$Y_{v,12} = 4 \cdot \Psi \cdot \frac{L}{D} \cdot \frac{c^2}{2} .$$

Nach Ersetzen von  $\lambda_{re} = 4 \cdot \Psi$  ergibt sich

$$Y_{v,12} = \lambda_{re} \cdot \frac{L}{D} \cdot \frac{c^2}{2} . \tag{3.49}$$

Die Gleichung (3.49) wird als die Formel von Darcy bezeichnet.

Anders als bei laminarer Strömung hängt die Rohrreibungszahl nicht nur von der Reynoldszahl, sondern auch von der inversen äquivalenten Sandrauigkeit  $D/k_s$  ab

$$\lambda_{re} = f \left( \text{Re}, \frac{D}{k_s} \right) . \tag{3.50}$$

Mit  $k_s$  wird die äquivalente Sandrauigkeit und mit  $D$  der äquivalente Durchmesser bezeichnet.

Bei technisch erzeugten Flächen sind durch gezielte Bearbeitungsprozesse die absoluten Sandrauigkeiten  $k$  vergleichbar. Dies gilt ungefähr auch für die gleichmäßige Abnutzung oder Verschmutzung (Rost, Ablagerungen). Versuche haben ergeben, dass für derartige Oberflächen die äquivalente Sandrauigkeit  $k_s$  bis zu 1,6 mal höher ist als die vorhandene absolute Rauigkeit [24]

$$k_s = 1,6k .$$

Anhand von (3.43) wird die Beziehung zwischen Druckverlust  $\Delta P_V$  und Volumenstrom  $\dot{V}$  durch das „Ohmsche Gesetz“ ausgedrückt:

$$\begin{aligned} \Delta P_V &= \rho \cdot Y_{V12} = \rho \cdot \frac{L}{D} \cdot \frac{\lambda_{re}}{2A^2} \cdot \dot{V}^2 \\ \Delta P_V &= R \cdot \dot{V}^2 \\ R &= \frac{\xi_R \cdot \rho}{2A^2}, \quad \xi_R = \lambda_{re} \cdot \frac{L}{D} \end{aligned} \quad (3.51)$$

R wird als Widerstand bezeichnet und  $\xi_R$  als die Widerstandszahl für ein gerades Rohr.

Bei einem nicht kreisförmigen Querschnitt wird ein Ersatzrundrohr eingeführt.

Hierbei wird angenommen, dass die Druckabfälle und die Längen des kreisförmigen Ersatzrohres (ER) und des Rohres mit beliebigem Querschnitt (UR) gleich sind

$$\Delta P_{V,UR} = \Delta P_{V,ER} \quad \text{und} \quad L_{UR} = L_{ER} = L .$$

Beachtet man, dass der Druckabfall gleich der Schubspannung  $\tau_{UR}$  ist (siehe Gleichung 3.27), so ergibt sich:

$$\Delta P_{V,UR} = \frac{F_{W,UR}}{A} = \frac{\tau_{UR} \cdot U \cdot L}{A}$$

Hierin bezeichnet U den Umfang des Querschnittes, L die Länge des Rohres und  $F_{W,ER}$  die Widerstandskraft durch Reibung.

Für das Ersatzrundrohr gilt

$$\Delta P_{V,ER} = \frac{F_{W,ER}}{A_{ER}} = \frac{\tau_{ER} \cdot D_{gl} \cdot \pi \cdot L}{D_{gl}^2 \cdot \pi / 4} = \frac{4\tau_{ER} \cdot L}{D_{gl}}$$

mit

$$\Delta P_{V,UR} = \Delta P_{V,ER} .$$

Hieraus lässt sich ein äquivalenter Durchmesser  $D_{gl}$  für den nicht kreisförmigen Querschnitt definieren:

$$D_{gl} = \frac{4 \cdot A}{U} \quad (3.52)$$

Mit diesem Ersatzdurchmesser ist es nun möglich, gemäß Gleichung (3.51) den Widerstand eines Rohres mit beliebigem Querschnitt zu bestimmen.

In den realen Anordnungen ist der Widerstand eine nichtlineare Funktion der Geschwindigkeit, des Reibungskoeffizienten und des Durchmessers. Um die Berechnung des Widerstandes zu erleichtern, werden die hierbei auftretenden komplexen Zusammenhänge in dem sog. MOODY-Diagramm zusammengefasst.

Hierbei wird anstatt der Rohrreibungszahl ein neuer Parameter, die Widerstandszahl  $\xi$ , eingeführt

$$\xi = f\left(\text{Re}, \frac{k_s}{D}\right)$$

Der Druckabfall  $\Delta P_V$  kann nun gemäß Gleichung (3.51) berechnet werden

$$\Delta P_V = \rho \cdot \xi \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\dot{V}}{A}\right)^2 \quad (3.53)$$

Die Widerstandszahl  $\xi$  kann aus dem nachfolgend dargestellten MOODY-Diagramm bestimmt werden.

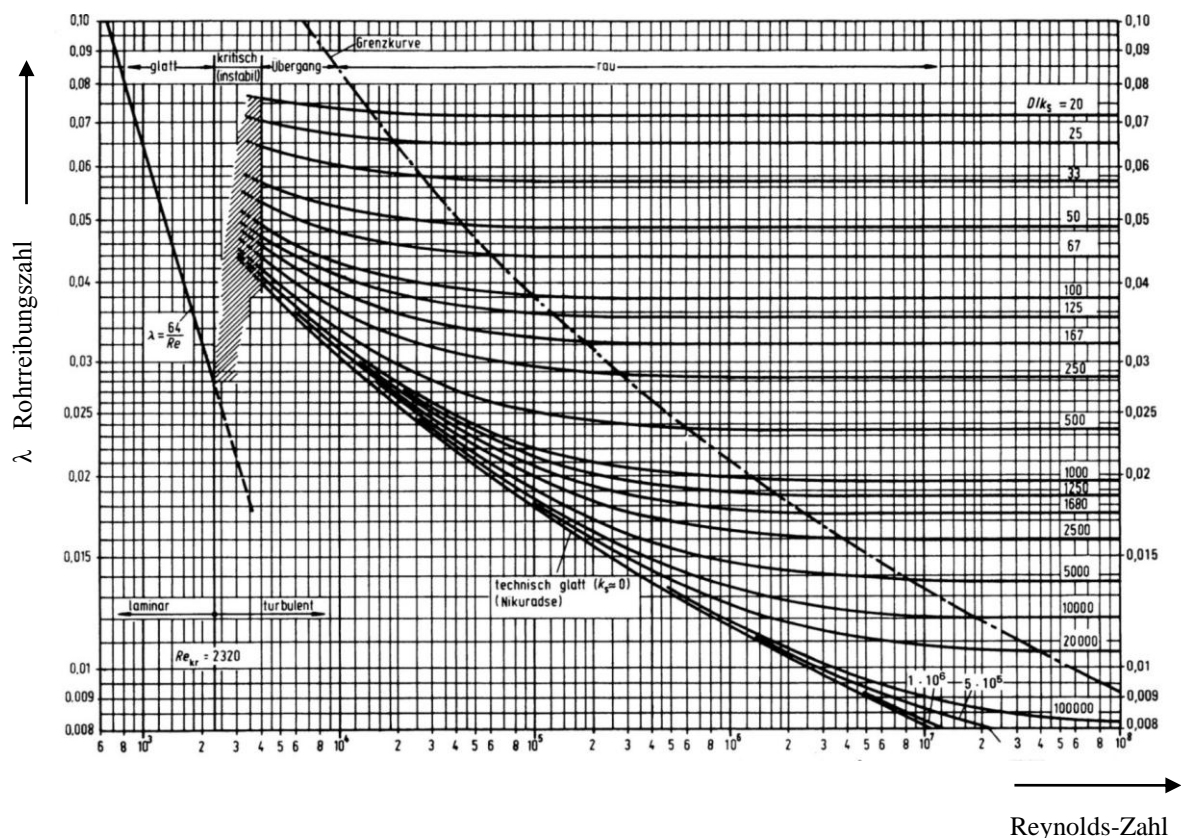


Abbildung 3.8: MOODY-Diagramm [25]

Der Zusammenhang zwischen dem Druckverlust und dem Volumenstrom stellt eine Grundlage für die Netzwerkanalyse dar. Die Bestimmung der funktionellen Abhängigkeiten der Widerstandszahl für geometrisch unregelmäßige Strukturen erfolgt in der Regel mit Hilfe von numerischen Methoden oder aber durch Messung an Modellanordnungen. Mittels der FEM-Simulation werden für das behandelte Objekt Kennlinien ermittelt, die den Zusammenhang

zwischen dem Druckverlust und dem Volumenstrom darstellen. Sie werden anschließend als Kennlinien in das Wärmequellennetzwerk eingefügt.

### 3.3.6 FEM zur Lösung von Navier-Stokes-Gleichungen

Die Methode der Finiten Elemente (FEM) ist ein Näherungsverfahren zur Lösung von Differentialgleichungen (PDG) für Rand- und Anfangswertprobleme in den Ingenieurwissenschaften. Bei dieser Methode wird das Forschungsobjekt in viele kleine Elemente unterschiedlicher geometrischen Formen unterteilt, z. B. Dreiecke oder Vierecke.

Für die einzelnen Elemente werden dann partielle Differentialgleichungen aufgestellt. Die gesuchte Funktion wird als eine Linearkombination von entsprechend ausgewählten Interpolationsfunktionen ausgedrückt und in das Gleichungssystem eingesetzt. Ein weiterer wichtiger Schritt ist die Überführung der PDG in ein algebraisches Gleichungssystem. Diese Einzelelementgleichungen werden schließlich durch den Einsatz von Variationsverfahren oder Verfahren der gewichteten Residuen zusammengefügt und ergeben dann ein globales System der algebraischen Gleichungen für das gesamte FEM-Modell, in das noch die zugehörigen Rand- sowie Anfangsbedingungen einzuarbeiten sind. Durch Lösung des gesamten Gleichungssystems ergeben sich schließlich die gesuchten Werte der Variablen an den Knotenpunkten [26].

Nachfolgend wird der Lösungsweg kurz dargestellt, wobei zur besseren Übersicht die Betrachtung auf eine 2-D-Ebene begrenzt wird.

Die Struktur des Gleichungssystems lässt sich leichter erkennen, wenn in Gleichung (3.32) die Strömungsgeschwindigkeit durch ihre Komponenten  $u, v$ , und  $w$  ausgedrückt wird

$$\begin{bmatrix} c_1(x, y, z) \\ c_2(x, y, z) \\ c_3(x, y, z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}.$$

Hiermit nimmt das Gleichungssystem folgende Form an:

in x - Richtung:

$$-\rho \left[ \frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial u}{\partial y} \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[ 2\eta \cdot \frac{\partial u}{\partial x} - p \right] + \eta \cdot \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right] = 0$$

in y - Richtung:

$$-\rho \left[ \frac{\partial v}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial v}{\partial y} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ 2\eta \cdot \frac{\partial v}{\partial y} - p \right] + \eta \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right] = 0 \quad (3.54)$$

Der Ausdruck  $\eta \cdot \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right]$  beschreibt die Konvektion.

Um eine genaue Lösung auch für höhere Reynoldszahlen zu gewährleisten, muss die Taylorreihe bis zu einer höheren Ordnung entwickelt werden.



Die Gleichungen (3.54) werden hierdurch erweitert zu:

in x - Richtung:

$$-\rho \left[ \frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial u}{\partial y} \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[ 2\eta \cdot \frac{\partial u}{\partial x} - p \right] + \eta \cdot \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right] \\ + u \cdot \frac{\Delta t}{2} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left[ u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial u}{\partial y} \right] + v \cdot \frac{\Delta t}{2} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left[ u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial u}{\partial y} \right] = 0$$

in y - Richtung:

$$-\rho \left[ \frac{\partial v}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial v}{\partial y} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ 2\eta \cdot \frac{\partial v}{\partial y} - p \right] + \eta \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right] \\ + u \cdot \frac{\Delta t}{2} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left[ u \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial v}{\partial y} \right] + v \cdot \frac{\Delta t}{2} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left[ u \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial v}{\partial y} \right] = 0 \quad (3.55)$$

Für Ströme in einem geschlossenen Raum gilt die Kontinuitätsgleichung (Gleichung 3.23).

Wird Gleichung (3.55) in die Kontinuitätsgleichung eingesetzt und diese mit der Funktion Q,W gewichtet, so ergibt sich:

$$\int_{\Omega^e} Q \cdot \left[ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right] \cdot d\Omega = 0$$

in x - Richtung:

$$\int_{\Omega^e} W \cdot \left[ -\rho \left[ \frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial u}{\partial y} \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[ 2\eta \cdot \frac{\partial u}{\partial x} - p \right] + \eta \cdot \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right] \right] \cdot d\Omega \\ + \int_{\Omega^e} W \cdot \left[ u \cdot \frac{\Delta t}{2} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left[ u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial u}{\partial y} \right] + v \cdot \frac{\Delta t}{2} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left[ u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial u}{\partial y} \right] \right] \cdot d\Omega = 0$$

in y - Richtung:

$$\int_{\Omega^e} W \cdot \left[ -\rho \left[ \frac{\partial v}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial v}{\partial y} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ 2\eta \cdot \frac{\partial v}{\partial y} - p \right] + \eta \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right] \right] \cdot d\Omega \\ + \int_{\Omega^e} W \cdot \left[ u \cdot \frac{\Delta t}{2} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left[ u \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial v}{\partial y} \right] + v \cdot \frac{\Delta t}{2} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left[ u \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial v}{\partial y} \right] \right] \cdot d\Omega = 0 \quad (3.56)$$

Q,W sind die Gewichtungsfunktionen,  $\Omega^e$  beschreibt das betrachtete Gebiet.

In den Navier-Stokes-Gleichungen gibt es zwei Variablen, die Geschwindigkeit der Ströme und den Luftdruck, die durch sogenannte Ansatzfunktionen ersetzt werden:

$$\begin{aligned}
u(x, y, t) &= \sum_{i=1}^n \psi(x, y) u_i(t) \\
v(x, y, t) &= \sum_{i=1}^n \psi(x, y) v_i(t) \\
p(x, y, t) &= \sum_{i=1}^n \phi(x, y) p_i(t)
\end{aligned} \tag{3.57}$$

$\psi(x, y)$ : Vektor der Ansatzfunktion für Strömungsgeschwindigkeit,  $\phi(x, y)$ : Vektor der Ansatzfunktion für Luftdruck.

Bei der Ableitung des Taylor-Galerkin-Verfahrens wird gezeigt, dass die Ansatzfunktionen ( $\psi$ ,  $\Phi$ ) und die Gewichtungsfunktionen ( $W$ ,  $Q$ ) identisch sein können. Werden die Funktionen ( $W$ ,  $Q$ ) durch ( $\psi$ ,  $\phi$ ) ersetzt, so ergibt sich mit

$$\int_{\Omega^e} \left[ \phi \cdot \frac{\partial \psi^T}{\partial x} \cdot u + \phi \cdot \frac{\partial \psi^T}{\partial y} \cdot v \right] \cdot d\Omega = 0$$

in x - Richtung:

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega^e} \left[ \left( \rho \psi \psi^T \frac{\partial u}{\partial t} \right) + \rho \left( \psi (\psi^T u) \frac{\partial \psi^T}{\partial x} + \psi (\psi^T v) \frac{\partial \psi^T}{\partial y} \right) \right] \cdot u \cdot d\Omega + \int_{\Omega^e} \left[ \left( 2\eta \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \psi^T}{\partial x} + \eta \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \psi^T}{\partial y} \right) \right] \cdot \\
& u \cdot d\Omega + \frac{\Delta t}{2} \int_{\Omega^e} \left[ uu \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \psi^T}{\partial x} + uv \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \psi^T}{\partial y} + vu \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \psi^T}{\partial x} + vv \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \psi^T}{\partial y} \right] \cdot u \cdot d\Omega \\
& + \int_{\Omega^e} \left[ \left( \eta \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \psi^T}{\partial x} \right) \cdot v - \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} \phi^T \right) \cdot p \right] \cdot d\Omega = \int_{\Omega^e} \rho \cdot \psi \cdot f_i \cdot d\Omega
\end{aligned}$$

in y - Richtung:

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega^e} \left[ \left( \rho \psi \psi^T \frac{\partial v}{\partial t} \right) + \rho \left( \psi (\psi^T u) \frac{\partial \psi^T}{\partial x} + \psi (\psi^T v) \frac{\partial \psi^T}{\partial y} \right) \right] \cdot v \cdot d\Omega + \int_{\Omega^e} \left[ \left( 2\eta \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \psi^T}{\partial x} + \eta \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \psi^T}{\partial y} \right) \right] \cdot \\
& v \cdot d\Omega + \frac{\Delta t}{2} \int_{\Omega^e} \left[ uu \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \psi^T}{\partial x} + uv \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \psi^T}{\partial y} + vu \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \psi^T}{\partial x} + vv \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \psi^T}{\partial y} \right] \cdot v \cdot d\Omega \\
& + \int_{\Omega^e} \left[ \left( \eta \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \psi^T}{\partial x} \right) \cdot u - \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} \phi^T \right) \cdot p \right] \cdot d\Omega = \int_{\Omega^e} \rho \cdot \psi \cdot f_i \cdot d\Omega
\end{aligned}$$

(3.58)

Die Gleichungen (3.58) können in Matrizenform dargestellt werden:

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} [M] & 0 & 0 \\ 0 & [M] & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{p} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} [C(u,v)] & 0 & 0 \\ 0 & [C(u,v)] & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u \\ v \\ p \end{bmatrix} + \\
& \begin{bmatrix} 2[K_{22}] + [K_{11}] & [K_{21}] & -[Q_1] \\ [K_{21}] & 2[K_{22}] + [K_{11}] & -[Q_1] \\ -[Q_1^T] & -[Q_1^T] & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u \\ v \\ p \end{bmatrix} \\
& + \begin{bmatrix} [K_{se}(u,v)] & 0 & 0 \\ 0 & [K_{se}(u,v)] & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u \\ v \\ p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

(3.59)

Die Definition und Bedeutung der eingeführten Koeffizient Matrizen sind in Tabelle 3.1 erläutert.

| Abkürzung       | Formel   | Bedeutung             |
|-----------------|--|-----------------------|
| $[M]$           | $\int_{\Omega^e} \rho \psi \psi^T d\Omega$   | Massenmatrix          |
| $[C(u,v)]$      | $\int_{\Omega^e} \rho \left( \psi(\psi^T u) \frac{\partial \psi^T}{\partial x} + \psi(\psi^T v) \frac{\partial \psi^T}{\partial y} \right) \cdot d\Omega$ $[C_x(u)] = \int_{\Omega^e} \rho \psi(\psi^T u) \frac{\partial \psi^T}{\partial x} d\Omega$ $[C_y(u)] = \int_{\Omega^e} \rho \psi(\psi^T v) \frac{\partial \psi^T}{\partial y} d\Omega$ $[C(u,v)] = [C_x(u)] + [C_y(u)]$ | Konvektionsmatrix     |
| $[K_{ij}]$      | $\int_{\Omega^e} \eta \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \psi^T}{\partial x_j} d\Omega$   | Diffusionsmatrix      |
| $[Q_i]$         | $\int_{\Omega^e} \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \phi^T d\Omega$  | Gradientenmatrix      |
| $[K_{se}(u,v)]$ | $\frac{\Delta t}{2} \int_{\Omega^e} u_i u_j \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \psi^T}{\partial x_j} d\Omega$   | Stabilisierungsmatrix |
| $(F_i)$         | $\int_{\Omega^e} \rho \psi f_i d\Omega$  | Kraftvektor           |

**Tabelle 3.1: Definition der Koeffizient-Matrizen**

Gleichung (3.59) hat somit folgende Struktur:

$$[M] \cdot \dot{U} + [K(u)] \cdot U = \{F\} \quad (3.60)$$

Um  $\dot{p}$  als zeitabhängige Funktionen zu behandeln, muss die dritte Zeile in dem Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} [M] & 0 & 0 \\ 0 & [M] & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{p} \end{bmatrix} \text{ um eine künstliche Massen-Matrix } [M_p], \text{ die so.g. künstliche Dichte}$$

(Kompressibilität), vervollständigt werden.

Hierfür wird zunächst die Gleichung (3.25) um den Term  $\frac{\partial \rho}{\partial t}$  erweitert:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (3.61)$$

Mit  $\rho$  wird die so.g. künstliche Dichte bezeichnet.

Mit der Annahme, dass der Druck direkt proportional zu dem Produkt aus künstlicher Dichte und der Konstante  $\beta$  ist

$$p = \rho \cdot \beta,$$

folgt

$$\frac{1}{\beta} \cdot \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \quad (3.62)$$

Eingesetzt in die Kontinuitätsgleichung folgt

$$\int_{\Omega^e} \left[ \frac{\phi \phi^T}{\beta} \cdot \frac{\partial p}{\partial t} + \phi \cdot \frac{\partial \psi^T}{\partial x} \cdot u + \phi \cdot \frac{\partial \psi^T}{\partial y} \cdot v \right] \cdot d\Omega = 0. \quad (3.63)$$

und in Gleichung 3.58 eingesetzt, erhält man schließlich:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} [M] & 0 & 0 \\ 0 & [M] & 0 \\ 0 & 0 & [M_p] \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{p} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} [C(u,v)] & 0 & 0 \\ 0 & [C(u,v)] & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u \\ v \\ P \end{bmatrix} \\ & + \\ & \begin{bmatrix} 2[K_{22}] + [K_{11}] & [K_{21}] & -[Q_1] \\ [K_{21}] & 2[K_{22}] + [K_{11}] & -[Q_1] \\ -[Q_1^T] & -[Q_1^T] & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u \\ v \\ P \end{bmatrix} + \\ & \begin{bmatrix} [K_{se}(u,v)] & 0 & 0 \\ 0 & [K_{se}(u,v)] & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u \\ v \\ P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.64)$$

Dabei ist.  $[M_p] = \frac{1}{\beta} \int_{\Omega^e} \phi \phi^T d\Omega$

Ansatzfunktionen zur Lösung der Druck- und Geschwindigkeitsverteilung

Die Ansatzfunktionen bestehen aus zwei zeit- und ortsabhängigen Variablen, die durch ein Polynom dargestellt werden können. Dieses Polynom kann auch als Skalarprodukt von zwei Vektoren definiert werden:

$$\begin{aligned}
 u(x, y, t) &= \sum_{i=1}^6 \psi(x, y) \cdot u_i(t) \\
 v(x, y, t) &= \sum_{i=1}^6 \psi(x, y) \cdot v_i(t) \\
 P(x, y, t) &= \sum_{i=1}^6 \phi(x, y) \cdot P_i(t)
 \end{aligned}
 \tag{3.65}$$

Die Vorgehensweise wird am Beispiel eines Dreieckselementes mit sechs Knoten aufgezeigt (Abbildung. 3.10):

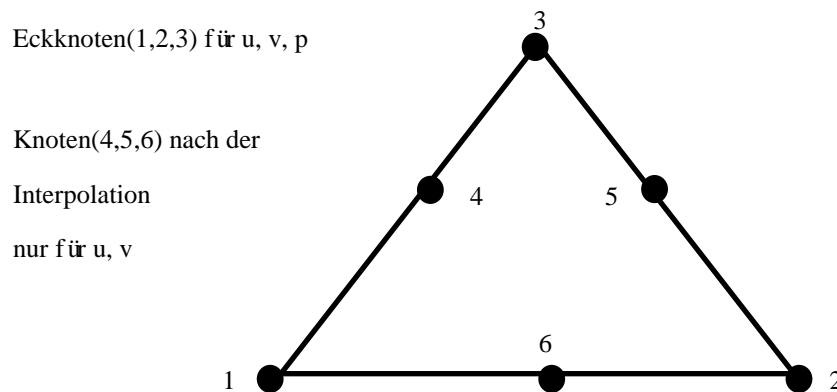


Abbildung 3.10: Quadratische Dreieckseinheit [27]

Die Knoten in Abbildung 3.10 werden in zwei Gruppen aufgeteilt: die Eckknoten, denen die Geschwindigkeits- und Luftdruckvektoren zugewiesen werden, und die Kantenvektoren, die nur über die Geschwindigkeitsvektoren charakterisiert werden. Daher werden auch zwei Ansatzfunktion  $\psi(x, y)$  und  $\phi(x, y)$  definiert.

Für ein Element mit sechs Knoten ergibt sich somit

$$\begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \\ \psi_5 \\ \psi_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1(2L_1 - 1) \\ L_2(2L_2 - 1) \\ L_3(2L_3 - 1) \\ 4L_1L_2 \\ 4L_2L_3 \\ 4L_3L_1 \end{bmatrix} \text{ und } \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{bmatrix}.
 \tag{3.66}$$

Hierbei sind  $L_1$ ,  $L_2$  und  $L_3$  Flächenkoordinaten, die von den kartesischen Koordinaten der drei Eckknoten  $(x_i, y_i)$  abhängen

$$\begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2S}(a_1 + b_1x + c_1y) \\ \frac{1}{2S}(a_2 + b_2x + c_2y) \\ \frac{1}{2S}(a_3 + b_3x + c_3y) \end{bmatrix}. \quad (3.67)$$

Die so definierten Funktionen werden in die PDG eingesetzt, womit das Gleichungssystem in ein neues mit den Unbekannten  $x$ ,  $y$  und  $z$  überführt wird.

Sind nach Lösung des Gleichungssystems die Funktionen  $\psi_1$  bis  $\psi_6$  und  $\phi_1$  bis  $\phi_3$  bekannt, so können hieraus die Werte für die übrigen Knoten  $a_i, b_i, c_i$  approximiert werden. Sie lassen sich in Abhängigkeit von den kartesischen Koordinaten  $x, y, z$  wie folgt ausdrücken:

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (x_2y_3 - x_3y_2) \\ (x_3y_1 - x_1y_3) \\ (x_1y_2 - x_2y_1) \\ y_2 - y_3 \\ y_3 - y_1 \\ y_1 - y_2 \\ x_3 - x_2 \\ x_1 - x_3 \\ x_2 - x_1 \end{bmatrix}. \quad (3.68)$$

Vorbereitend auf die Lösung des Gleichungssystems (3.64) müssen die Matrizen  $M$  und  $K_{11}$  bestimmt werden.

Der Ansatzfunktionsvektor der Strömungsgeschwindigkeit kann in Form einer Matrixgleichung angegeben werden

$$\psi = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} L_1^2 \\ L_2^2 \\ L_3^2 \\ L_1L_2 \\ L_2L_3 \\ L_3L_1 \end{bmatrix}, \quad [A]_{6 \times 6} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}. \quad (3.69)$$

Im neuen Koordinatensystem können alle Koeffizienten der Matrix  $L$  und  $M$  durch die Integration

$$\int_{\Omega^e} L_1^a L_2^b L_3^c d\Omega = \frac{a!b!c!}{(a+b+c+2)!} 2S. \quad (3.70)$$

bestimmt werden.

Mit  $a, b$  und  $c$  werden die Potenzen der Flächenkoordinaten bezeichnet,  $S$  ist die Fläche der Dreiecke

$$S = \frac{1}{2} \cdot [(x_2 - x_1) \cdot (y_3 - y_2) - (y_2 - y_1) \cdot (x_3 - x_2)].$$

Für die Massen-Matrix [M] ergibt sich hiernach

$$[M] = \int_{\Omega^e} \rho \psi \psi^T d\Omega,$$

$$\psi \psi^T = [A][A]^T \begin{bmatrix} L_1^2 \\ L_2^2 \\ L_3^2 \\ L_1 L_2 \\ L_2 L_3 \\ L_3 L_1 \end{bmatrix} \cdot [L_1^2, L_2^2, L_3^2, L_1 L_2, L_2 L_3, L_3 L_1],$$

$$[M] = [A][A]^T \frac{2S}{360} \begin{bmatrix} 12 & 2 & 2 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & 12 & 2 & 3 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 12 & 1 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 3 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}. \quad (3.71)$$

Analog können andere Matrizen, z. B die Diffusionsmatrix, hergeleitet werden

$$[K_{11}] = \int_{\Omega^e} \eta \frac{\partial \psi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \psi^T}{\partial x} d\Omega,$$

$$[K_{22}] = \int_{\Omega^e} \eta \frac{\partial \psi}{\partial y} \cdot \frac{\partial \psi^T}{\partial y} d\Omega. \quad (3.72)$$

Der Ausdruck  $\frac{\partial \psi}{\partial x}$  lässt sich durch Einsatz der Ansatzfunktionsvektoren unter Berücksichtigung der Gleichung (3.67) wie folgt darstellen:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = [A] \frac{\partial}{\partial x} \begin{bmatrix} L_1^2 \\ L_2^2 \\ L_3^2 \\ L_1 L_2 \\ L_2 L_3 \\ L_3 L_1 \end{bmatrix} = [A] \frac{1}{2S} \begin{bmatrix} 2b_1 & 0 & 0 \\ 0 & 2b_2 & 0 \\ 0 & 0 & 2b_3 \\ b_2 & b_1 & 0 \\ 0 & b_3 & b_2 \\ b_3 & 0 & b_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{bmatrix} \quad (3.73)$$

Auf gleiche Art wird der Ausdruck  $\frac{\partial \psi}{\partial y}$  bestimmt

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = [A] \frac{\partial}{\partial y} \begin{bmatrix} L_1^2 \\ L_2^2 \\ L_3^2 \\ L_1 L_2 \\ L_2 L_3 \\ L_3 L_1 \end{bmatrix} = [A] \frac{1}{2S} \begin{bmatrix} 2c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 2c_2 & 0 \\ 0 & 0 & 2c_3 \\ c_2 & c_1 & 0 \\ 0 & c_3 & c_2 \\ c_3 & 0 & c_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{bmatrix}. \quad (3.74)$$

### Newton-Raphson-Methode

Um die Effizienz der Konvergenz zu verbessern, wird als Zwischenschritt ein Teilsystem der Gleichung (3.64) behandelt:

$$\begin{bmatrix} [C(u,v)] + [K_{22}] + 2[K_{11}] + [K_{se}] & [K_{12}] & -[Q_1] \\ [K_{21}] & [C(u,v)] + [K_{22}] + 2[K_{11}] + [K_{se}] & -[Q_1] \\ -[Q_1^T] & -[Q_1^T] & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u \\ v \\ p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ 0 \end{bmatrix};$$

Mit Hilfe des Newton-Raphson-Verfahrens wird anhand der bekannten Anfangsbedingungen (Komponenten der Strömungsgeschwindigkeit  $u$ ,  $v$  und Luftdruck  $p$ ) die Steifigkeitsmatrix  $K(u)$  bestimmt.

In Matrixschreibweise ergibt sich hieraus folgende Grenzbedingung:

$$[K(u)] \cdot U = \{F\} \Rightarrow W(U) = [K(u)] \cdot U - \{F\} = 0 \quad (3.75)$$

Nach der Zerlegung in eine Taylor-Reihe erhält man:

$$0 = W(U^n) + \frac{\partial W}{\partial U} \Delta U$$

Aus der Beziehung

$$U^{n+1} - U^n = \Delta U$$

lassen sich direkt die Werte für den Zeitschritt  $n+1$  bestimmen, wenn die Werte für den Zeitschritt  $n$  bekannt sind

$$U^{n+1} = U^n - [J^{-1}(U^n)] \cdot W(U^n). \quad (3.76)$$

Mit  $J = -\frac{\partial W}{\partial U}$ , wird die Jacobi-Matrix bezeichnet; der Vektor  $W$  kann durch folgenden Ausdruck dargestellt werden:

$$W = \begin{bmatrix} W_1 \\ W_2 \\ W_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [C(u,v) + K_{22} + 2K_{11} + K_{se}] \cdot u + K_{12} \cdot v - Q_1 \cdot p - F_1 \\ [C(u,v) + K_{22} + 2K_{11} + K_{se}] \cdot v + K_{21} \cdot u - Q_1 \cdot p - F_2 \\ -Q_1^T \cdot u - Q_1^T \cdot v \end{bmatrix} \quad (3.77)$$

Die Elemente der Jacobi-Matrix berechnen sich durch die Differentiationen der Komponenten  $W_1$ ,  $W_2$  und  $W_3$  nach  $u$ ,  $v$  und  $p$



$$J = -\frac{\partial W}{\partial U} = -\begin{bmatrix} \frac{\partial W_1}{\partial u} & \frac{\partial W_1}{\partial v} & \frac{\partial W_1}{\partial p} \\ \frac{\partial W_2}{\partial u} & \frac{\partial W_2}{\partial v} & \frac{\partial W_2}{\partial p} \\ \frac{\partial W_3}{\partial u} & \frac{\partial W_3}{\partial v} & \frac{\partial W_3}{\partial p} \end{bmatrix}. \quad (3.78)$$

### Rückwärts Euler'sche Zeitapproximation

Zur Vervollständigung der Gleichung (3.64) muss noch der Summand

$$\begin{bmatrix} [M] & 0 & 0 \\ 0 & [M] & 0 \\ 0 & 0 & [M_p] \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{p} \end{bmatrix}$$

bestimmt werden. Hierfür werden die Funktionswerte

$$\begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{p} \end{bmatrix}, \text{ nachfolgend als } [\dot{U}] \text{ bezeichnet, benötigt.}$$

Da manche Elemente in der Steifigkeitsmatrix zeitabhängig sind, muss zur Lösung das „Verfahren der impliziten Probleme“, in dem die Methode der „Rückwärts Euler'schen Zeitapproximation“ zum Einsatz kommt, angewandt werden.

Gleichung (3.59) lässt sich mit

$$[K(u)] \cdot U - \{F\} = W(U)$$

in folgende Form überführen:

$$[M] \cdot \dot{U} + W(U) = 0 \quad (3.79)$$

Aus Gleichung 3.76 folgt:

$$U^{n+1} - U^n = -[J^{-1}(U^n)] \cdot W(U^n) \Rightarrow \Delta U \cdot [J(U^n)] = -W(U^n)$$

Zusätzlich gilt

$$[M] \cdot \dot{U} + \Delta U \cdot [J(U^n)] = 0. \quad (3.80)$$

Da der Vektor

$$W(U) = [K(U)] \cdot U - \{F\} = 0$$

aus der Differenz zwischen  $[K(U)] \cdot U$  und  $\{F\}$  besteht, strebt sein Wert immer gegen null.

Daher vereinfacht sich Gleichung (3.59) zu:

$$[M] \cdot \dot{U}^n + \Delta U \cdot [J(U^n)] = W(U^n) \quad (3.81)$$

---

Mit  $\dot{U}^{n+1} = \frac{U^{n+1} - U^n}{\Delta t}$  folgt

$$[M] \cdot \left( \frac{U^{n+1} - U^n}{\Delta t} \right) + [J(U^{n+1})] \cdot (U^{n+1} - U^n) = W(U^{n+1}). \quad (3.82)$$

Entsprechend der Iterationsvorschrift in Gleichung (3.80) kann schließlich der nächste Punkt berechnet werden

$$U^{n+1} = U^n - [J^{-1}(U^n)] \cdot W(U^n).$$

Die Konvergenz wird stets durch folgendes Kriterium überprüft:

$$\varepsilon = \sum_{i=1}^n \left| \frac{U^{n+1} - U^n}{\Delta t} \right| \leq 0,01 \quad (3.83)$$

### 3.4 Zusammenfassung des Kapitels

Im dritten Kapitel werden die theoretischen Grundlagen zur Ermittlung der Kühlströmungsgeschwindigkeit im Generator dargelegt. Durch die Analyse der Wärmeübertragung wird die Beziehung zwischen den Wärmeübertragungskoeffizienten und der Geschwindigkeit des Kühlmittels herausgearbeitet. Es wird gezeigt, dass die Konvektionsmechanismen in der Strömungslehre große Bedeutung haben und dass mit ihrer Hilfe unterschiedliche Arten der Strömung und die Verteilung der Strömungsgeschwindigkeit bestimmt werden können. Am Ende wird die NAVIER-STOKES-Gleichung analysiert, die es erlaubt, die Viskosität der realen Strömungsbewegungen zu erfassen. Da es unmöglich ist, reelle Bauteile des Generators ausreichend genau analytisch zu beschreiben, wird abschließend die FEM-Methode als eine geeignete Maßnahme zur Aufgabenlösung kurz vorgestellt.

---

## Kapitel 4 Kühlgasverteilung im Generator

Wie in der Einleitung bereits beschrieben, werden zur Abfuhr der Wärme unterschiedliche Kühlmedien, nämlich Luft, Wasserstoff und Wasser verwendet. Abhängig von der Art der Leiterkühlung werden die Kühlsysteme direkt, wenn das Medium direkt den Leiter berührt, oder indirekt, wenn die Wärmeabfuhr über die Isolation und das Blechpaket bzw. den Läuferkörper erfolgt, ausgeführt. Bei Generatoren größter Leistung werden Stator- und Läuferwicklung direkt mit Wasser gekühlt, während das Blechpaket zusätzlich mit Wasserstoff gekühlt wird.

Bei den Leistungen unterhalb von 400 MVA wird Luft als Kühlmittel bevorzugt, im mittleren Bereich zwischen 400 und 1300 MVA wird Wasserstoff eingesetzt. Die höchsten Leistungen zwischen 1300 und 2200 MVA lassen sich nur durch Einsatz von Wasser als Kühlmittel realisieren, wobei hier zwei unterschiedliche Lösungsvarianten praktisch realisiert werden:

- Stator- und Rotorwicklung mit Wasserkühlung
- Ständerwicklung mit Wasser- und Rotorwicklung mit Wasserstoffkühlung.

Das Blechpaket, die Endzone sowie der Luftspalt werden in beiden Fällen zusätzlich mit Wasserstoff gekühlt.

Unabhängig von der gewählten Kühlungsart erfolgt der Wärmetransport hauptsächlich durch Konvektion. Um die Kühlung zu verbessern, wird bei den Generatoren großer Leistung häufig ein gemischtes Kühlkonzept umgesetzt, in dem das Kühlmittel sowohl in axialer als auch in radialer Richtung befördert wird. Die konstruktive Lösung für den Kühlkreis ist stark abhängig von der Leistungsstärke der Kühlungsart. Sie variiert auch vom Hersteller zu Hersteller. Nachfolgend werden Beispiele zur Ausgestaltung der unterschiedlichen Kühlsysteme kurz vorgestellt.

### 4.1 Generatoren mit indirekter Luftkühlung

Bei Generatoren mit niedrigen Leistungen wird Luft als Kühlmittel verwendet. Das Kühlsystem eines luftgekühlten Turbogenerators bildet einen geschlossenen Kreislauf, der in der Regel durch ein einstufiges Gebläse versorgt wird. Das prinzipielle Schema des Kühlkreissystems ist in Abbildung 4.1 dargestellt.

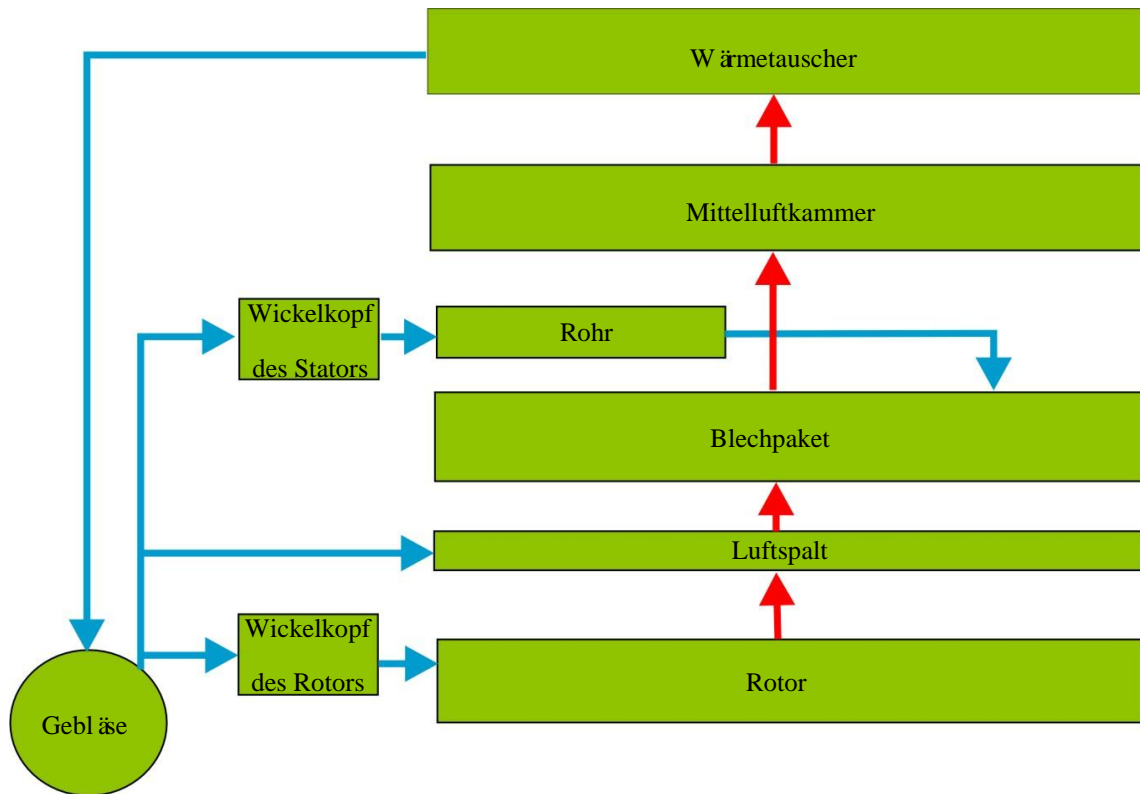


Abbildung 4.1: Kühlgasverteilung in einem indirekt luftgekühlten Turbogenerator

Das auf der Welle befestigte Gebläse saugt den eindringenden Luftstrom ab und presst diesen durch einen wassergekühlten Wärmetauscher.

Durch die Schaufeln des Gebläses wird der Druck stark erhöht, was unmittelbar eine Verstärkung der Luftströmung nach sich zieht. Daher werden die Schaufeln bei der mathematischen Beschreibung des Kreislaufes als Druckquelle berücksichtigt.

Der gesamte Volumenstrom wird in zwei Teilströme aufgeteilt:

1. Den Stator-Strom, der durch den Ständerwickelkopf über die Verbindungsrohre in die Luftkammer des Gehäuses gelangt und von dort über die Kühlschlitze im Blechpaket zum Luftspalt geführt wird, siehe Abbildung 4.2.

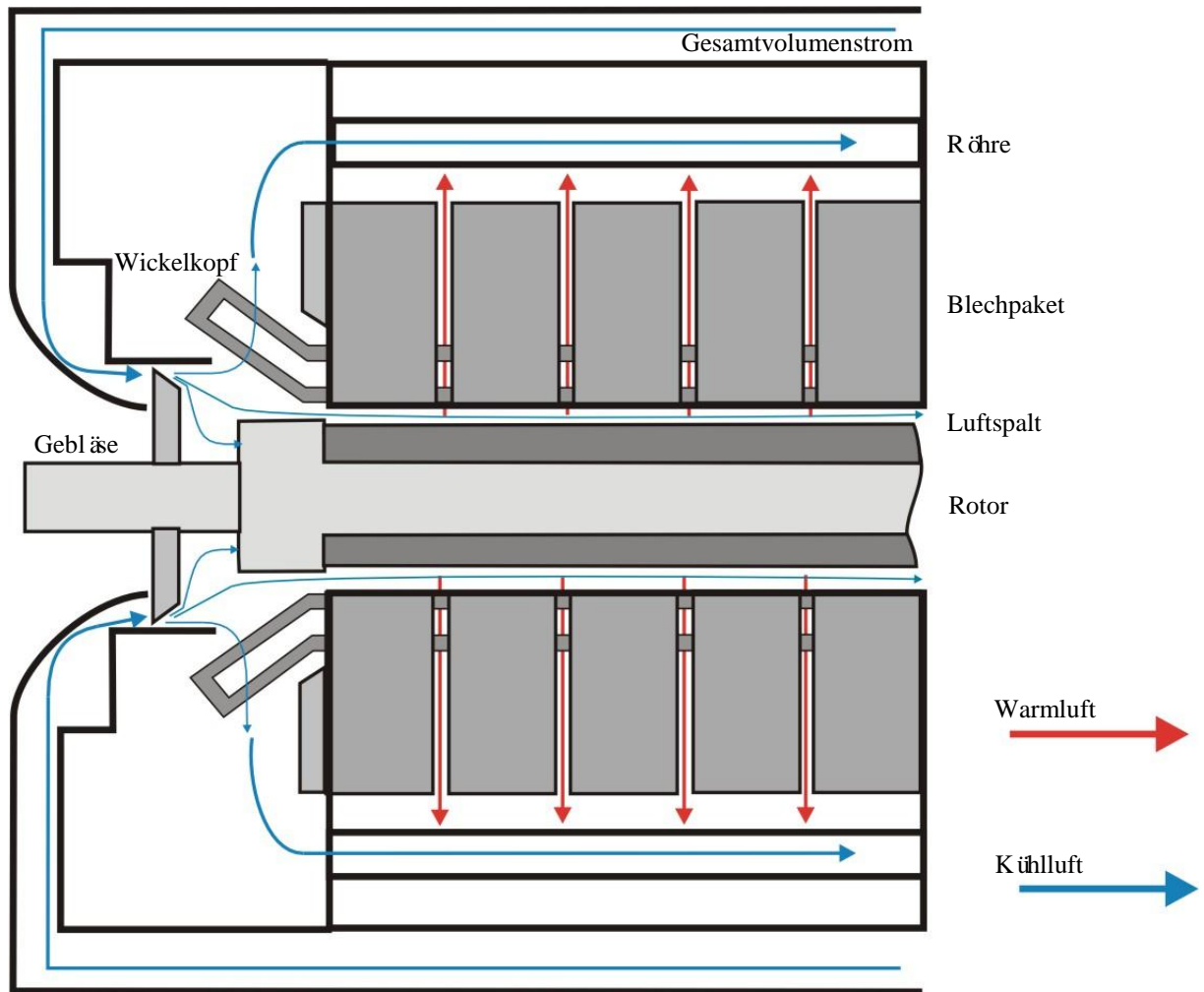


Abbildung 4.2: Kühlgasverteilung im Stator beim luftgekühlten Generator [12]

Die Gehäusekammer umhüllt das gesamte Blechpaket des Generators. Sie setzt sich aus mehreren Kammern zusammen, aus denen die Luftströme in die Kühlschlitze des Blechpaketes hineinfließen, dem Blechpaket die Wärme entziehen und anschließend erwärmt zum Luftspalt geleitet werden.

2. Den Rotorstrom, der unter der Läuferkappe durch den Rotorwickelkopf zu den Rotorgrundkanälen geführt wird (siehe Abbildung 4.3).



Abbildung 4.3: Axialer Lufteintritt in den Rotor durch Nutgrundkanäle

Von dort wird der Luftstrom über senkrechte Bohrungen durch die Rotorwicklung ebenfalls zum Luftspalt geleitet (siehe Abbildung 4.4).

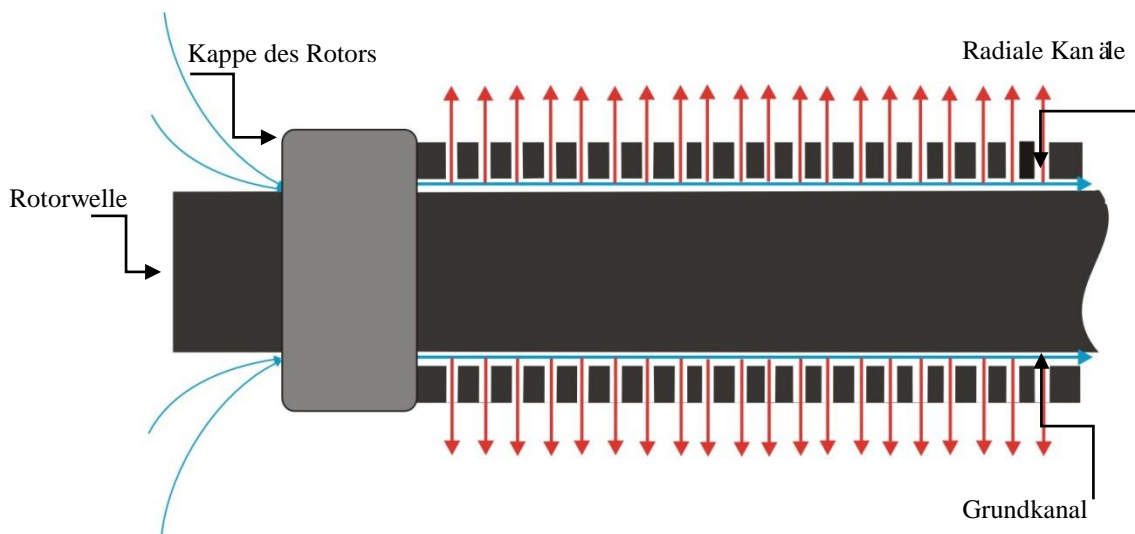


Abbildung 4.4: Kühlgasführung im Läufer eines luftgekühlten Generators [12]

Gemäß den Erkenntnissen aus der Theorie der Strömungsmechanik verteilt sich der gesamte Volumenstrom gleichmäßig in einen ringförmigen Bereich. Da der gesamte Läuferkörper mit einer hohen Geschwindigkeit rotiert, dominiert eine Zentrifugalbeschleunigung.

Ein kleiner Anteil der Strömung wird direkt zur Kühlung des Rotorwickelkopfes verwendet und nach Erwärmung direkt zum Luftspalt geführt. Die Kühlung der Rotorwicklung unter der Läuferkappe wird durch die Thermosiphonwirkung [37] verbessert, die eine Bildung von zusätzlichen Strömungskreisen in den speziell hierfür geformten Kammern erzwingt.

## 4.2 Generator mit direkter Wasserstoffkühlung

Bei den Generatoren größerer Leistung, zurzeit oberhalb von 350 MVA, wird als Kühlmittel Wasserstoff verwendet. Anders als bei den indirekt gekühlten Maschinen fließt das Gas direkt durch die Stator- und Rotorstäbe, wodurch eine deutlich effizientere Kühlung realisiert wird. Die Verlustwärme wird direkt am Ort ihrer Entstehung abgeführt.

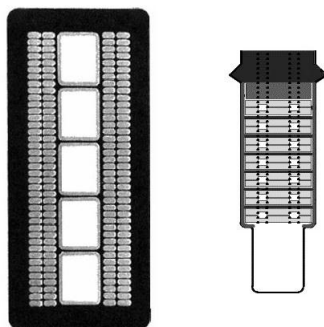
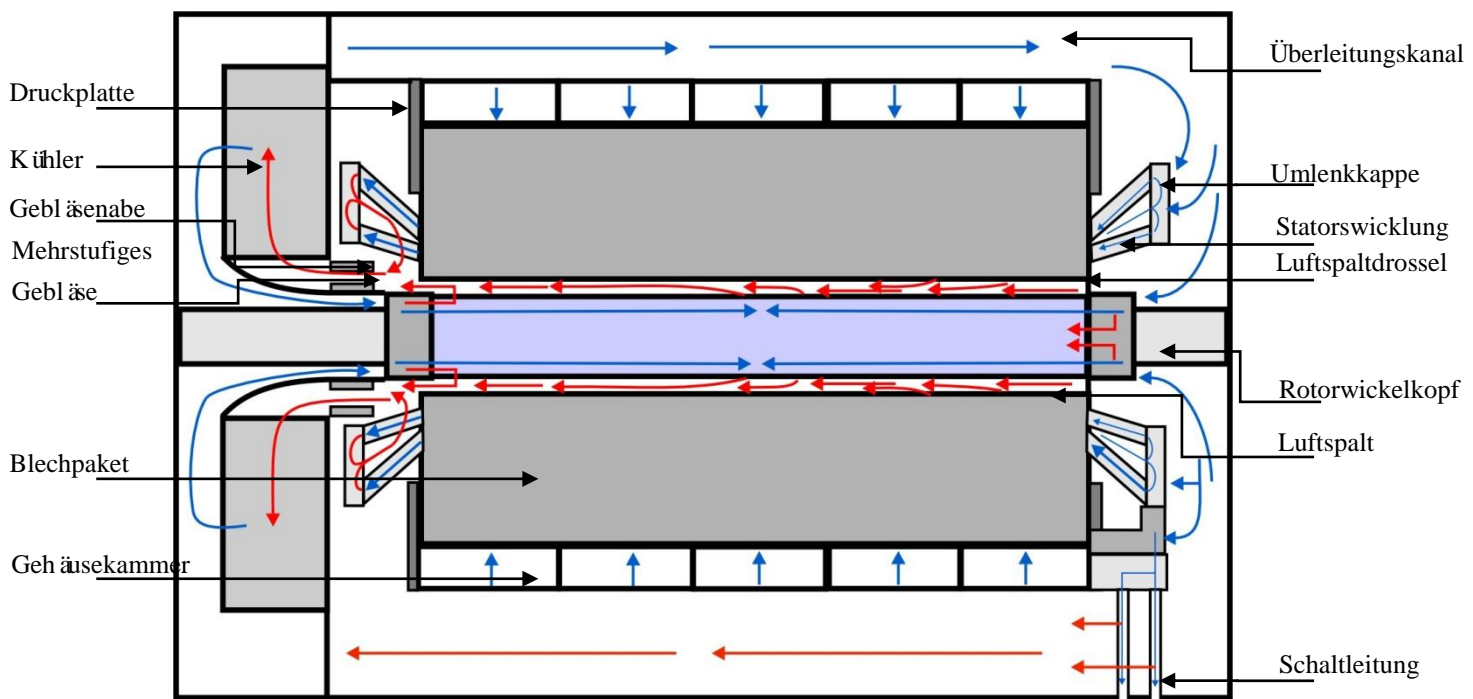


Abbildung 4.5: Querschnitt durch die Stator (links)- und Rotorwicklung (rechts) eines wasserstoffgekühlten Generators [11]

Der Kühlkreislauf innerhalb des Generators ist dem eines luftgekühlten Generators sehr ähnlich. Der Wasserstoff wird im geschlossenen Kreislauf in der Regel durch zwei auf den Läuferwellen angebrachte Gebläse umgewälzt. Allerdings liegen die Wärmeaustauscher beim wasserstoffgekühlten Generator meist längs über dem Generatorgehäuse. Um die durch die Vermischung zwischen Wasserstoff und Luft verursachte Explosionsgefahr zu vermeiden, muss das Gehäuse dicht und druckfest ausgeführt werden. Außerdem muss die Maschine vor der Füllung mit dem Wasserstoff mit CO<sub>2</sub> gespült werden.

Das Kühlkonzept und seine wichtigsten Merkmale sind in Abbildung 4.6 dargestellt und werden nachfolgend kurz erläutert.



**Abbildung 4.6: Kühlgasverteilung in einem Turbogenerator mit direkter Wasserstoffkühlung [12]**

Das kalte Gas aus dem Kühler wird in zwei Hauptströme aufgeteilt, die zu den beiden Generatorseiten geleitet werden.

Der Volumenstrom wird unter der turbinseitigen Gebläsenabe in den Läuferwickelkopf geführt und von dort weiter über die axialen Kanäle bis zur Rotormitte geleitet. Dort tritt er durch die radialen Bohrungen im Luftspalt aus und wird axial über den Luftspalt von dem Gebläse eingesaugt.

Ein Teil dieser Strömung wird durch die Gasrohre zum Ständerwickelkopf und zu den Gehäusekammern gefördert und von dort über die Blechpaketschlitze ebenfalls zum Luftspalt hin gepresst.

---

Der zweite Hauptstrom wird über die Gehäuseschächte auf die Erregerseite gefördert. Dort wird er analog zur Turbinenseite zum Rotor und zum Wickelkopf geführt.

Durch eine solche konzeptionelle Lösung wird erreicht, dass der Rotor von beiden Seiten mit kaltem Gas versorgt wird, und sich dadurch eine weitgehend gleichmäßige Temperaturverteilung über die gesamte Rotorlänge einstellt.

Der Kühlkreis ist geschlossen, wobei der Kühler durch das von außen zugeführte Wasser gekühlt wird. Um eine bessere Kühlwirkung zu erreichen und eventuellen Explosionen vorzubeugen, wird der Gasdruck innerhalb der Maschine auf 5 bis 6 Bar erhöht, was besondere Maßnahmen bei der Gehäusekonstruktion erfordert. Insbesondere muss die Dichtheit des gesamten Kühlkreises gewährleistet sein.

### 4.3 Generator mit direkter Wasserkühlung

Zur Verbesserung der Kühleffizienz werden bei Turbogeneratoren hoher Leistung als Kühlmedien Wasser und Wasserstoff eingesetzt (siehe Abbildung 4.8). Das Wasser wird direkt durch die Rotor- und Statorstäbe geführt, wodurch die Verluste in den Leitern sehr effektiv abgeführt werden können, da Wasser eine deutlich höhere spezifische Wärmekapazität besitzt als Wasserstoff und der Wärmeübergang zwischen Kupfer und Wasser ebenfalls höher, als zwischen Kupfer und Wasserstoff, ist.

Die Wasserkanäle befinden sich in den Stäben und sind in der Ständerwicklung aus nichtrostendem Stahl hergestellt (siehe Abbildung 4.7).

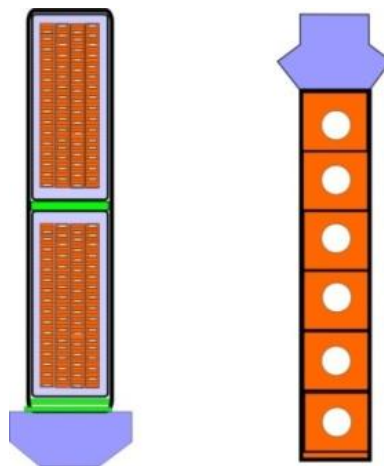


Abbildung 4.7: Querschnitt durch den Stator (links)- und Rotorstab (rechts) eines Generators mit direkter Wasserkühlung [12]

Da die Ständerwicklung als Hochspannungswicklung ausgeführt wird, muss das Kühlwasser in einer speziellen Aufbereitungsanlage kontinuierlich entionisiert werden. Die Umwälzung



des Kühlwassers wird durch eine Kreiselpumpe bewerkstelligt, die in der Regel auf der Erregerseite direkt auf der Erregerwelle montiert ist. Das kalte Wasser fließt aus dem Kühler in den Primärwasserbehälter und von dort weiter zu dem Generator. Dort wird das Wasser in drei parallele Hauptströme aufgeteilt, welche die wichtigsten Komponenten:

- Lüfterwicklung,
- Ständerwicklung sowie
- Stromdurchführungen und Schaltleitungen durchströmen.

Danach wird das Primärwasser wieder durch die Pumpe zu dem Kühler zurückgeführt.

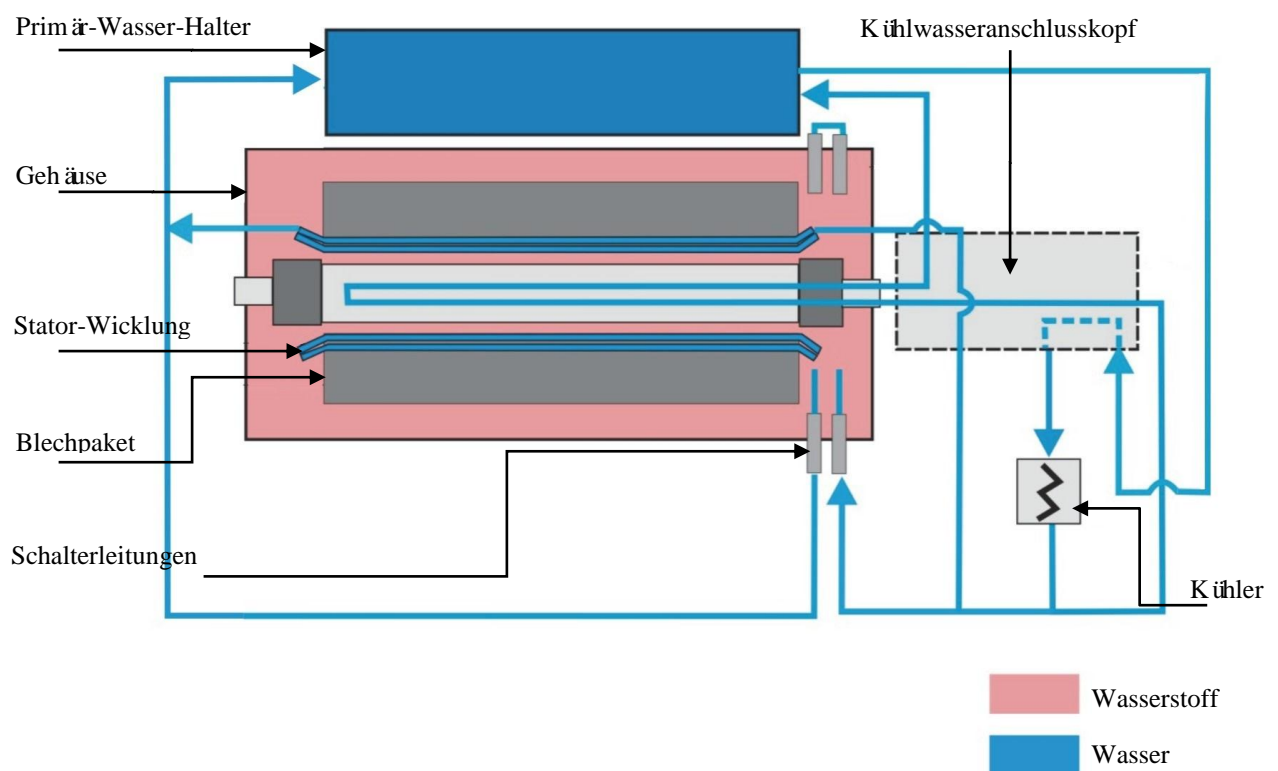


Abbildung 4.8: Kühlschema eines direkt wassergekühlten Generators [12]

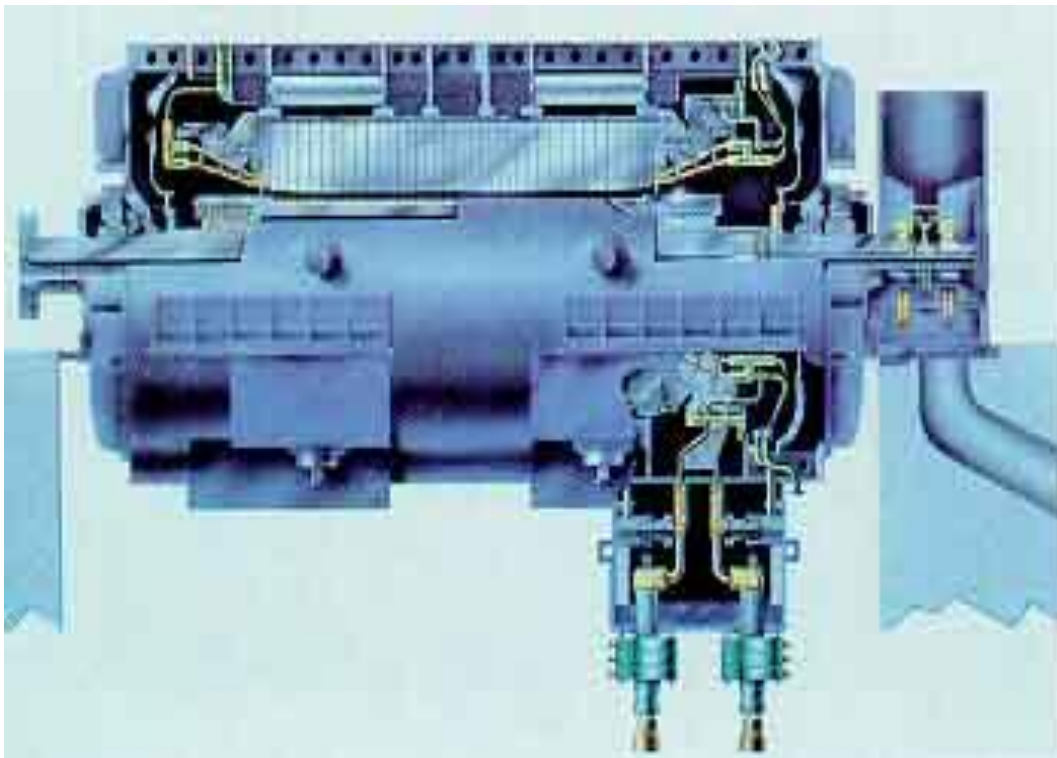
Die Kühlung der Rotoroberfläche, des Blechpaketes sowie der Endzone erfolgt in der Regel durch Wasserstoff, der ähnlich wie bei den gasgekühlten Maschinen durch Gebläse gefördert wird. Wie beim luftgekühlten Generator werden sie jeweils auf der Turbinenseite und der Erregerseite der Maschine eingebaut.

Der Wasserstoffkreislauf ist relativ einfach. Da der Druckbedarf der Maschine gering ist, werden nur einstufige Lüfter verwendet. Ein Teil des gekühlten Gases versorgt die Abschirmringe und Druckplatten. Das restliche Gas fließt zu der Gehäusenkammer und von dort durch

---

die Blechpaketschlitz zum Luftspalt hin. Die mittleren Kammern werden von beiden Seiten mit Wasserstoff versorgt. Das gesamte Gas sammelt sich im Luftspalt und fließt wieder zu den Lüftern zurück (siehe Abbildung 4.8).

Da die technische Umsetzung der Wasserkühlung wegen der direkten Leiterkühlung und der damit verbundenen Entionisierung des Wassers sehr aufwendig und kostenintensiv ist, wird dieses Kühlkonzept nur bei Generatoren höchster Leistung, d.h. oberhalb von 800 MVA, umgesetzt.



**Abbildung 4.9: Querschnitt durch einen 1500 MVA Generators**

---

## Kapitel 5 Anwendung der Netzwerktheorie zur Analyse von Strömungsnetzwerken

Der Schlüssel zur Analyse von Strömungsnetzwerken ist die Kontinuität der Strömung, da das gesamte Kühlsystem geschlossen ist. Daraus folgt, dass die gesamte Menge des Kühlgases konstant ist. Anhand dieser Voraussetzung wird die Netzwerktheorie eingeführt.

In einem elektrischen Netzwerk sind Spannungs- und Stromquellen, Widerstände, Kondensatoren und Spulen zu einer vorgegebenen Struktur zusammengeschaltet.

Im Strömungsnetzwerk existieren nur die Luftdruckquellen und die Widerstände. Anhand der vorhandenen physikalischen Kenngrößen und mit einigen durch Messungen vorausbestimmten Anfangsbedingungen kann ein Netzwerk zur Bestimmung der Kühlgasverteilung erstellt werden.

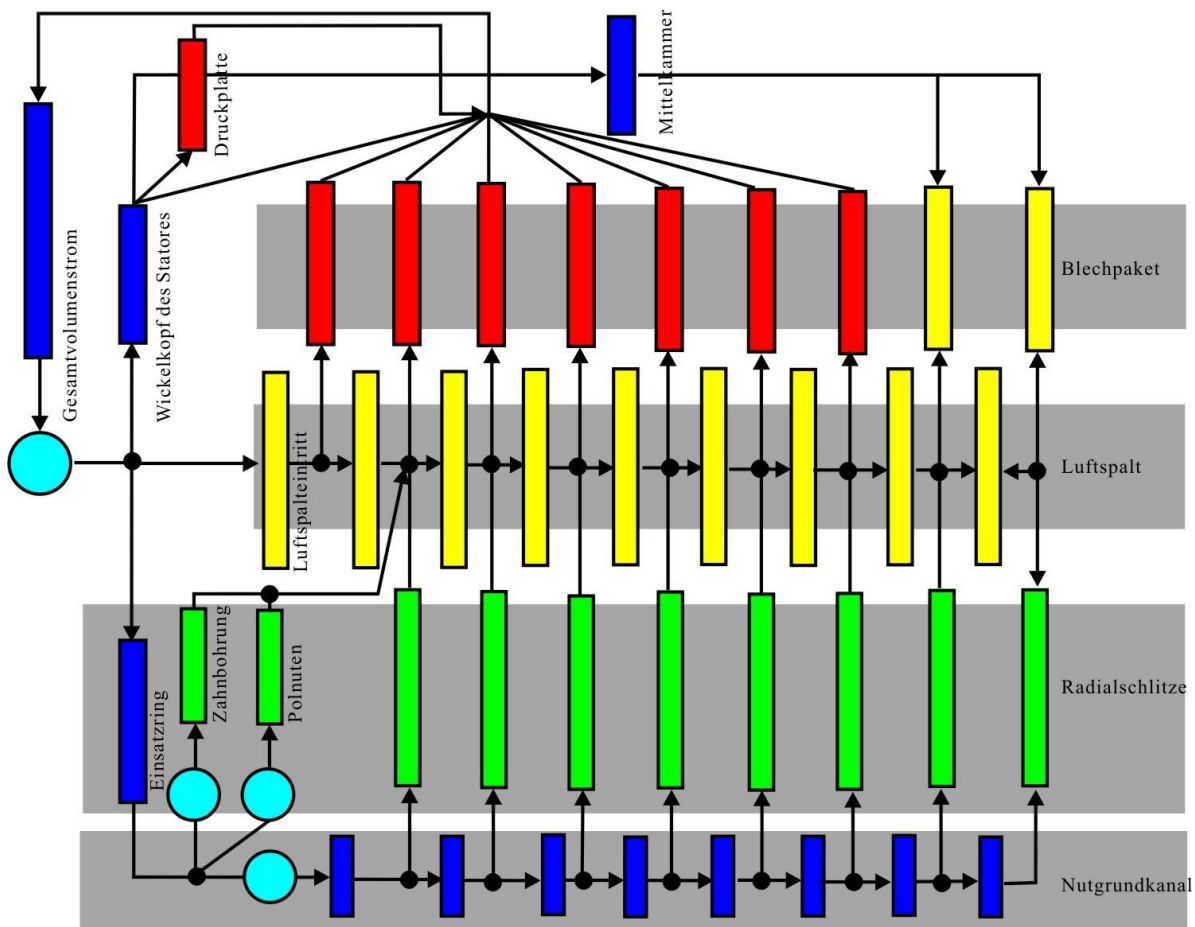
Als Anwendungsbeispiel wird in dieser Arbeit das Strömungsnetzwerk für einen luftgekühlten Generator aufgebaut und anschließend gelöst. Das gesamte System wird in mehrere symmetrische Teile aufgeteilt.

Es wird angenommen, dass alle Strömungen in den Kühlkanälen stationär sind und die Übergangszustände nicht berücksichtigt werden.

Für die Anfangsbedingungen im Netzwerk werden Erfahrungswerte für die Mehrzahl von Druck und Volumenströme eingesetzt.

Die Widerstände werden iterativ aus dem Zusammenhang zwischen der Geschwindigkeit und dem Druckabfall ermittelt, die wiederum von vielen Einflussgrößen wie z. B. der Geschwindigkeit und der Temperatur abhängig sind.

In der folgenden Abbildung 5.1 ist das abstrahierte Strömungsnetzwerk eines Turbogenerators dargestellt.



5.1: Gasströmungsverteilung für einen luftgekühlten Generator [28]

Die Gebläse werden als Druckquellen betrachtet, sie entsprechen den Spannungsquellen in elektrischen Schaltungen.

Wie bereits in Kapitel 4 beschrieben, fließt ein Teilstrom zuerst unter die Kappe des Läufers. Obwohl der Strömungspfad unter der Kappe sehr komplex ist, wird dieser Bereich häufig mit einem Widerstand abgebildet.

Wie in Abbildung 5.1 dargestellt, wird der Gesamtstrom in drei Teile gespalten: Ein Teil fließt entlang des Läufergrundkanals. Ein zweiter Teil führt durch senkrechte Kanäle zum Luftspalt. Der dritte Teil fließt durch den Wickelkopf zur Mittelkammer hin. Aufgrund der topologischen Struktur fließen alle Volumenströme vom Luftspalt ins Blechpaket des Ständers. Tatsächlich gibt es zwei unterschiedliche Kühlschlitze, die unterschiedliche Distanzstege besitzen. Gleichzeitig fließen zwei Volumenströme aus den Mittelkammern, um das Blechpaket herum, um die Mitte der Maschine abzukühlen. Diese beiden Kühlströme fügen sich in die anderen Volumenströme des Luftspalts ein. Danach werden alle Volumenströme zusammen wieder über die Wärmeaustauscher abgekühlt und fließen anschließend zu den Gebläsen zurück.

## 5.1 Klassische Netzwerktheorie

Um die Verteilung der Volumenströme in den Kühlkanälen zu bestimmen, wird die konventionelle Netzwerktheorie eingesetzt. Stetig fließende Luftströme werden wie elektrische Ströme in einer Schaltung behandelt. Im Vergleich mit der Anwendung der Netzwerktheorie im elektrischen Bereich muss die Nichtlinearität des Strömungsnetzwerks gemäß der Gleichung

$$\Delta P_v = \rho \cdot \xi \cdot \frac{1}{2} \left( \frac{\dot{V}}{A} \right)^2 \text{ berücksichtigt werden.}$$

Die Vorgehensweise bei der Aufstellung der Maschengleichungen wird am Beispiel eines einfachen Netzwerkes in Abbildung 5.2 kurz skizziert.

Die gesamte topologische Struktur umfasst 6 Zweige und 3 Knoten.

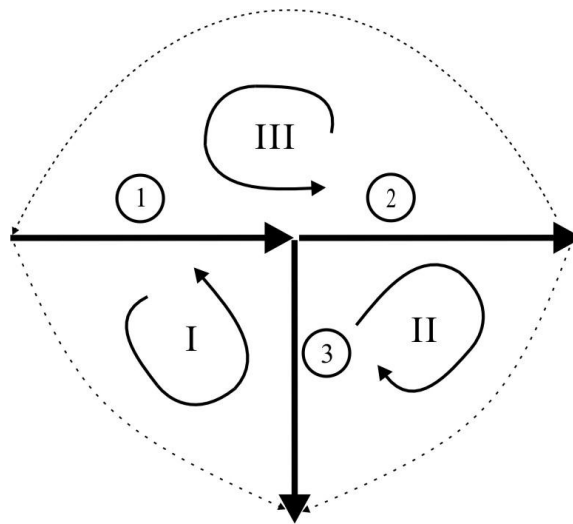


Abbildung 5.2: Beispiel-Netzwerk mit 6 Zweigen und 4 Knoten [29]

Aus der Graphentheorie folgt, dass das Netzwerk mit  $z$  Knoten und  $k$  Zweigen  $z-k+1$  unabhängige Maschen besitzt. Vorbereitend für die Erfassung der Netzwerkstruktur werden die Zweige in Äste und Sehnen aufgeteilt:

- Äste sind die Zweige, die den Baum des Netzwerkgraphen bilden (Linie mit Pfeil).
- Als Sehnen werden die übrigen Zweige bezeichnet, mit denen der Baum zum vollständigsten Netzwerkgraphen geschlossen wird (gestrichelte Linien).

### Bildung der Maschenmatrix

Das Vorzeichen der Elemente der Maschenmatrix wird durch eine vorgegebene Durchlaufrichtung und Zugehörigkeit zur Masche festgelegt:

- $b_{i,j} = 1$     Zweig  $j$  gehört zur Masche  $i$  und wird positiv durchlaufen.
- $b_{i,j} = -1$     Zweig  $j$  gehört zur Masche  $i$  und wird negativ durchlaufen.
- $b_{i,j} = 0$     Zweig  $j$  gehört nicht zur Masche.

Für das Beispielnetzwerk ergibt sich folgende Maschenmatrix:

$$[B] = \left[ \begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \quad (5.1)$$

Die Maschenmatrix kann in die Hypermatrizen der Äste  $[B_A]$  und der Sehne  $[B_S]$  aufgeteilt werden. Dann lässt sich ihre Struktur wie folgt darstellen:

$$[B] = \left[ \begin{array}{cc|c} \text{Äste} & \text{Sehnen} & \text{Maschen} \\ 1 \dots k-1 & k \dots z & \\ \hline & & 1 \\ & & 2 \\ & & \vdots \\ & & z - k + 1 \end{array} \right] \quad (5.2)$$

$$[B] = \left[ [B_A] \mid [E_{z-k+1}] \right]$$

Die Maschenimpedanzmatrix  $[Z_M]$

Die Elemente der Maschenimpedanzmatrix werden durch die Multiplikation der Matrizen  $[B]$ ,  $[Z]$  und  $[B]^T$  gemäß der Gleichung

$$[Z_M] = [B] \cdot [Z] \cdot [B]^T \quad (5.3)$$

gebildet.

Die Matrix  $[Z]$  ist die Zweigimpedanzmatrix:

$$[Z] = \left[ \begin{array}{cccccc} Z_1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & Z_2 & & & \\ \vdots & & \ddots & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & & & & Z_n \end{array} \right] \quad (5.4)$$

deren Elemente  $Z_1$  bis  $Z_n$  auf der Diagonalen liegen und als Summe aller Widerstände im jeweiligen Zweig gebildet werden.

Die im Netzwerk vorkommenden Spannungsquellen werden in der Matrix der Zweigquellenspannungen  $(U_q)$  zusammengefasst:

$$(U_q) = \begin{bmatrix} U_{q1} \\ U_{q2} \\ \vdots \\ U_{qn} \end{bmatrix}$$

Ihre Elemente  $U_{q_1}$  bis  $U_{q_2}$  werden als Summe aller Quellenspannungen, die in einem Zweig vorkommen, berechnet.

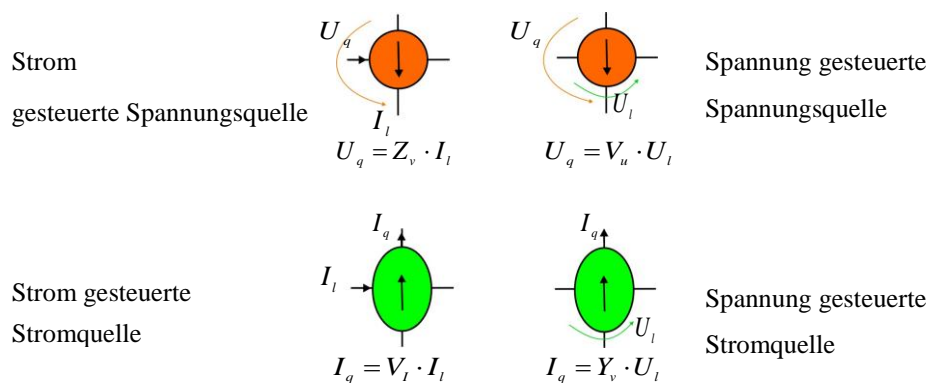
Mit den vorstehend definierten Hypermatrixen können nun Maschengleichungen für das zu analysierende Netzwerk in allgemeiner Form angegeben werden:

$$\begin{bmatrix} [E_Z] & -[Z] \\ [0] & \begin{bmatrix} [E_{k-1}] & -[B_A]^T \\ [0] & [Z_M] \end{bmatrix} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} (U_q) \\ (I_A) \\ (I_S) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (U_q) \\ (0) \\ -[B] \cdot (U_q) \end{bmatrix} \quad (5.5)$$

$(I_A)$  und  $(I_S)$  sind die unbekannt Ströme in den Ästen und in den Sehnen.

### Gesteuerte Quellen:

Außer den konstanten Quellen können in das Netzwerk die sog. „gesteuerten Quellen“ integriert sein, deren Ausgangsgröße direkt von den Strömen bzw. Spannungen des eigenen oder eines fremden Zweiges im Netzwerk abhängig sind. Sie lassen sich in folgende vier Quellenarten aufteilen:



**Abbildung 5.3: Unterschiedliche Arten der gesteuerten Quellen [29]**

Unter Berücksichtigung der gesteuerten Quelle ( $U_s$ ) erweitert sich das Gleichungssystem (5.5) zu:

$$\begin{bmatrix} [E_Z] & -[Z] & -[E_Z] \\ [0] & \begin{bmatrix} [E_{k-1}] & -[B_A]^T \\ [0] & [Z_M] \end{bmatrix} & [B] \\ -[V_U] & -[Z_v] & [E_Z] \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} (U) \\ (I_A) \\ (I_S) \\ (U_s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (U_{q,const}) \\ (0) \\ -[B] \cdot (U_{q,const}) \\ (0) \end{bmatrix} \quad (5.6)$$

Die Hypermatrixen ( $V_u$ ) und ( $Z_v$ ) beinhalten die Koeffizienten der gesteuerten Quellen, ihre Struktur enthält die Information über die Verknüpfung mit der Zweigspannung bzw. dem Zweigstrom.

---

## 5.2 Vorgehensweise bei der Erstellung eines Strömungsnetzwerks

Nachdem die wichtigsten theoretischen Grundlagen erarbeitet wurden, kann nun die Analyse des Kühlsystems eines realen Generators erfolgen. Die Vorgehensweise wird am Beispiel eines Generators mit indirekter Luftkühlung durchgeführt, der bereits in Kapitel 4.1 ausführlich beschrieben wurde.

In Übereinstimmung mit der Netzwerktheorie wird für diesen Generator ein Netzwerk aufgebaut, in dem alle wichtigen Bauteile und Strömungswege enthalten sind.

Hierbei ist zu beachten, dass es sich hier um ein Strömungsnetzwerk handelt und dementsprechend die Größen „Strom“ und „Spannung“ durch „Volumenstrom“ und „Luftdruckabfall“ ersetzt werden müssen.

Die Struktur des Netzwerks sowie die Zuordnung der einzelnen Knoten und Zweige zu den Generatorbereichen sind in Abbildung 5.4 dargestellt.



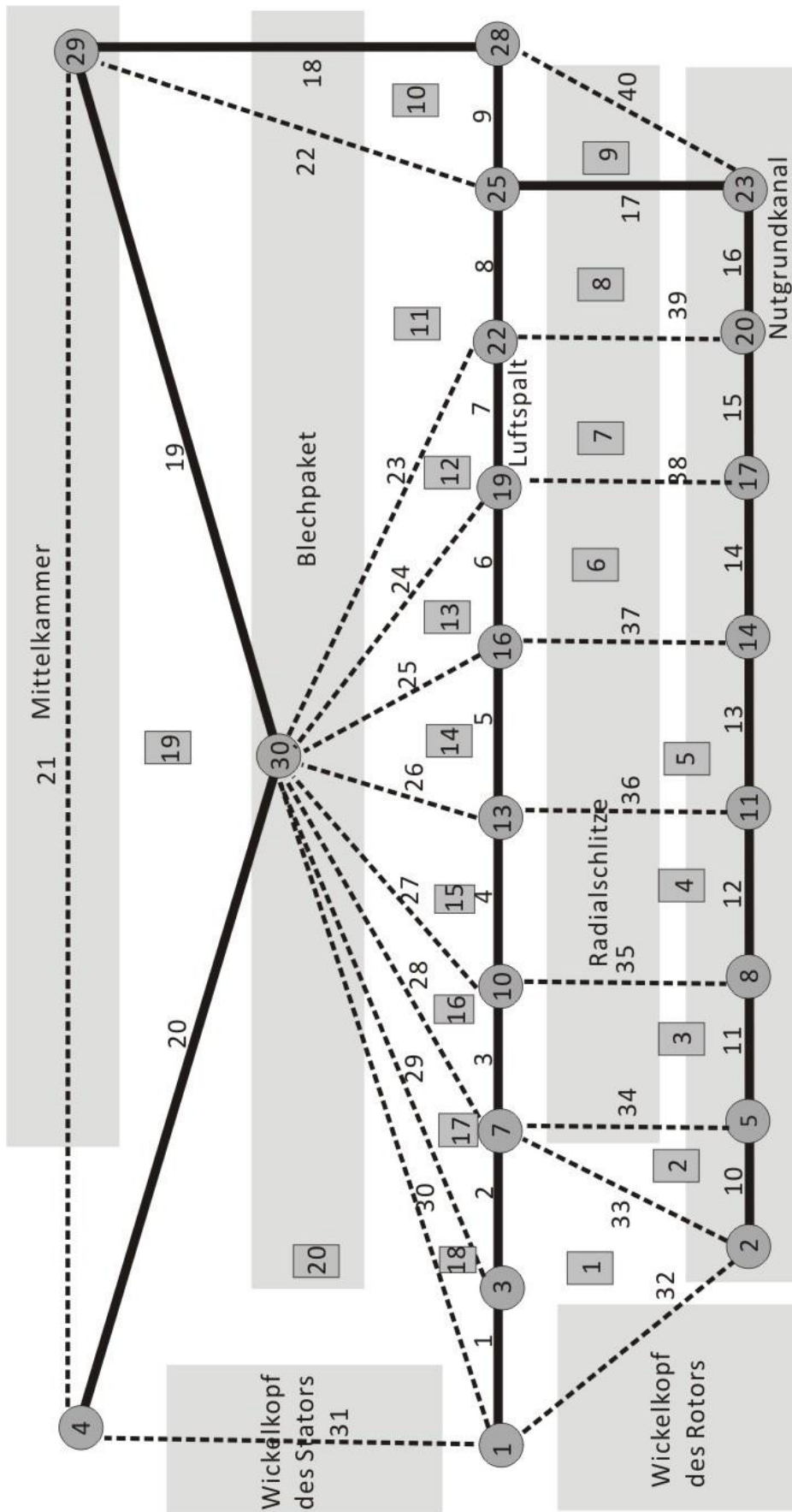


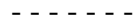



Abbildung 5.4: Strömungsnetzwerk eines luftgekühlten Generators

In Abbildung 5.9 werden folgende Bezeichnungen und Symbole eingeführt

- |                                   |   |
|-----------------------------------|---|
| - Knoten                          |                     |
| - Äste                            |                      |
| - Sehnen                          |                      |
| - Knotennummer                    | die Zahl im Kreis  |
| - Zweignummer ( Äste und Sehnen ) | die Zahl an dem Zweig   |
| - Maschennummer                   | die Zahl im Rechteck  |

Das Beispielnetzwerk besteht aus 21 Knoten und 40 Zweigen. Die Zweige, die den gewählten Baum des Graphen bilden, sind mit dicken schwarzen Linien gezeichnet. Der Baum wird zum vollständigen Netzwerk durch 20 Äste ergänzt, wodurch ebenfalls 20 geschlossene unabhängige Maschen gebildet werden.

Weil der Luftstrom als Stromfaden betrachtet wird, kann die Struktur des Netzwerks auf einer Ebene, über die Länge der Maschinen ausgedehnt, dargestellt werden.

### 5.3 Die Teilmatrizen im Strömungsnetzwerk

Für die Aufstellung des Gleichungssystems wird das in Kapitel 5.1 vorgestellte, weitgehend formalisierte Maschenverfahren angewandt.

Für das Beispiel ergibt sich ein Gleichungssystem mit 20 Unbekannten, wobei die Maschenmatrix [B] insgesamt 20 Zeilen und 40 Spalten enthält.

Sie wird in 2 Hypermatrizen der Äste und der Sehnen unterteilt. Eine weitere Hypermatrix ist die Einheitsmatrix  $[E_{z-k+1}]$ .

Um die Zuordnung zwischen dem abgebildeten Generatorbereich und der zugehörigen Masche zu verdeutlichen, werden nachfolgend die einzelnen Maschen in Übereinstimmung mit der Abbildung 4.10 kurz charakterisiert:

Masche 1: Einsatzring, Luftspalteintritt, Zahnbohrung

Masche 2: Pol-Nuten, Eintritt in den Nutgrundkanal des Läufer, erste radiale Schlitz des Läufer

Maschen 3-9: Axiale Abschnitte des Läufer: Luftspalt, Radialschlitz und Nutgrundkanal

Maschen 10-17: Axiale Abschnitte des Luftspalts und des Blechpakets

Masche 18: Luftspalteintritt, erstes Segment des Blechpakets, Druckplatte, Ständerwickelkopf

Masche 19: Mittelkammer

Masche 20: Wickelkopf des Ständers, Gesamtvolumenstrom

Für die Beschreibung des Netzwerks müssen die Elemente der Hypermatrixen bestimmt werden:

$$\begin{bmatrix} [E_z] & & -[Z] & & -[E_z] \\ [0] & ([E_{k-1}] & -[B_A]^T) & \begin{bmatrix} [0] \\ [B] \end{bmatrix} \\ -[V_v] & & -[Z_v] & & [E_z] \end{bmatrix} \quad (5.7)$$

Die Struktur und Belegung der einzelnen Hypermatrixen werden nachfolgend analysiert.

Teilmatrix  $[E_z]$  ist eine Einheitsmatrix, deren Dimension gleich der Anzahl der Zweige ist:

$$[E_z] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & & & \\ \vdots & & \ddots & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & & & & 1 \end{bmatrix} \quad (5.8)$$

Teilmatrix  $[Z]$  ist eine Diagonalmatrix, deren Elemente die Summe aller Widerstände im jeweiligen Zweig ist:

$$[Z] = \begin{bmatrix} R_1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & R_2 & & & \\ \vdots & & \ddots & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & & & & R_{40} \end{bmatrix}_{40 \times 40} \quad (5.9)$$

Teilmatrix  $[E_{k-1}]$  ist ebenfalls eine Einheitsmatrix, deren Dimension die Anzahl der Knoten  $k-1$  ist:

$$[E_{k-1}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & & & \\ \vdots & & \ddots & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & & & & 1 \end{bmatrix}_{20 \times 20} \quad (5.10)$$

Teilmatrix  $[B_A]^T$ :

$[B] = [[B_A] | [E_{z-k+1}] ]$  ist eine Astinzidenzmatrix.

Das Vorzeichen der Elemente in der Maschenmatrix wird durch die Vorgabe der Durchlauf-richtung jeder Masche in Abbildung 5.4 festgelegt. Hiernach ergibt sich für die Teilmatrix  $B_A$  folgende Struktur:



2. Der Druckabfall ( $\Delta P$ ), der durch die Druckabfälle an anderen Netzwerkzweigen beeinflusst wird. Die Abhängigkeit wird durch die Steuerungsmatrix  $[V_u]$  erfasst, deren Elemente  $V_{u,i,j}$  ebenfalls als Steuerungsfaktoren wirken.

Das behandelte Beispielnetzwerk besitzt keine vom Druckabfall gesteuerten Druckquellen. Daher werden alle Elemente in der Matrix  $[V_u]$  auf Null gesetzt.

Wird berücksichtigt, dass es sich bei den Strömungsgleichungen um ein nichtlineares Gleichungssystem handelt, bei dem die Volumenströme im Quadrat auftreten, so ergibt sich für den Vektor der Unbekannten:

$$\begin{bmatrix} (\Delta P) \\ \left( \begin{matrix} \dot{V}_A^2 \\ \dot{V}_S^2 \end{matrix} \right) \\ (\Delta P_{st}) \end{bmatrix} \quad (5.13)$$

Die Elemente dieser Matrix sind Vektoren, die folgenden Größen darstellen:

- $(\Delta P)$  enthält die Summe aller Druckabfälle jedes Zweigs
- $(\dot{V}_A)$  enthält die Volumenströme aller Äste
- $(\dot{V}_S)$  fasst die Volumenströme aller Sehnen zusammen
- $(\Delta P_{st})$  beinhaltet alle gesteuerten Druckabfallquellen

## 5.4 Lösungsverfahren für nichtlineare Netzwerkgleichungen

Nachdem die einzelnen Hypermatrizen definiert wurden kann das zu lösende Gleichungssystem für das Strömungsnetzwerk angegeben werden:

$$\begin{bmatrix} [E_z] & & & & \\ & -[Z] & & & \\ [0] & \begin{bmatrix} [E_{k-1}] & -[B_A]^T \\ [0] & [Z_M] \end{bmatrix} & & & \\ & & -[E_z] & & \\ -[V_u] & & \begin{bmatrix} [0] \\ [B] \\ [E_z] \end{bmatrix} & \cdot & \begin{bmatrix} (\Delta P) \\ \left( \begin{matrix} \dot{V}_A^2 \\ \dot{V}_S^2 \end{matrix} \right) \\ (\Delta P_{st}) \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(P_{q, const}) \\ (0) \\ [B] \cdot (P_{q, const}) \\ (0) \end{bmatrix}. \quad (5.14)$$

Das Gleichungssystem ist stark nichtlinear, deswegen kann die Lösung nur iterativ gefunden werden. Ob die Iteration erfolgreich zum Ziel führt und ob die Genauigkeit der erhaltenen Ergebnisse ausreichend ist, hängt wesentlich von dem Grad der Nichtlinearität, dem Umfang des Gleichungssystems und von dem eingesetzten Verfahren ab.

Nachfolgend werden drei bewährte Lösungsverfahren:

- das Newton-Raphson-Verfahren,
- das Hardy-Cross-Verfahren sowie
- das Linearisierungs-Verfahren

vorge stellt und in Hinblick auf ihre Eignung zur Lösung der Strömungsgleichungen bewertet.

Allen Verfahren gemeinsam ist, dass die Lösung iterativ in mehreren Schritten gewonnen wird. Dabei wird stets in gleicher Weise vorgegangen: Die neuen Ergebnisse werden nach

jedem Iterationsschritt durch die Addition der schon errechneten alten Werte und der neu errechneten Korrekturwerte gebildet, wobei der Vorgang so lange wiederholt wird, bis die gewünschte Genauigkeit erreicht ist.

### Newton-Raphson-Verfahren [30]

Das Newton-Raphson-Verfahren wird für große Gleichungssysteme eingesetzt, bei denen die Parameter von dem Lösungsvektor abhängig sind. Den Kern bildet die iterative Näherung nach Newton unter Verwendung des Eliminationsverfahrens.

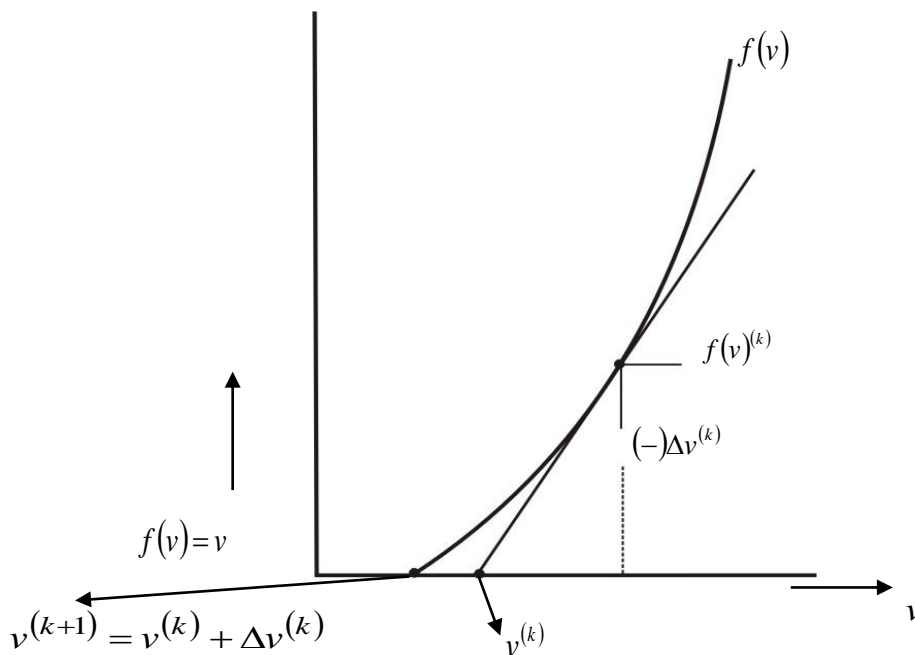
Das zu lösende Gleichungssystem wird in die folgende Form überführt:

$$f(v^{(k)}) = [A^{(k)}] \cdot v^{(k)} + b^{(k)} = r^{(k)} \quad (5.15)$$

Es wird ein Lösungsvektor  $v^{(k)}$  gesucht für den die Funktion  $f(v^{(k)}) = 0$  ist.

Um die Vorgehensweise bei der Lösung darzustellen, genügt es, ein eindimensionales Beispiel zu betrachten.

Die Iteration wird mit einem geschätzten Anfangsvektor  $v^{(0)}$  begonnen (siehe Abbildung 5.5):



**Abbildung 5.5: Vorgehensweise bei der Lösung von nichtlinearen Gleichungen mit Hilfe des Newton-Raphson-Verfahrens**

Im Schritt  $k+1$  wird eine gegenüber dem Schritt  $k$  verbesserte Lösung gefunden.

$$v^{(k+1)} = v^{(k)} + \Delta v^{(k)} \quad (5.16)$$

Die Korrektur

$$\Delta v^{(k)} = - \frac{f^{(k)}}{F'^{(k)}} \quad (5.17)$$

wird aus der Tangenten der Funktion  $f(v)$  in dem  $k$ -ten Näherungspunkt bestimmt.

Durch die Umformung von Gleichung (5.17) ergibt sich:

$$F'^{(k)} \cdot \Delta v^{(k)} + f^{(k)} = 0 \quad (5.18)$$

Die Koeffizienten Matrix  $[F'^{(k)}]$  ist in der Literatur als Jacobimatrix bekannt.

Wird das Verfahren auf ein Gleichungssystem mit  $n$ -Unbekannten erweitert, so existieren  $n$  Funktionen  $f_i$  und  $n$  Differenzen  $\Delta v_i$ . Entsprechend erhält man für jede Funktion  $f_i$   $n$  partielle Ableitungen  $\frac{\partial f_i}{\partial v_j}$  d. h. es ergeben sich insgesamt  $n \times n$  partielle Ableitungen.

Die Steigungen  $\frac{\partial f_1}{\partial v_1}$  und  $\frac{\partial f_n}{\partial v_n}$  werden in der Jacobimatrix  $[F'^{(k)}]$  zusammengefasst:

$$[F'^{(k)}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1^{(k)}}{\partial v_1} & \dots & \frac{\partial f_1^{(k)}}{\partial v_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n^{(k)}}{\partial v_1} & \dots & \frac{\partial f_n^{(k)}}{\partial v_n} \end{bmatrix} \quad (5.19)$$

Die Elemente der Jacobi-Matrix werden durch die Differentiation der Elemente

$$f_i^{(k)} = \left( \sum_{l=1}^n a_{il}^{(k)} v_l^{(k)} \right) + b_i^{(k)} \quad (5.20)$$

hergeleitet.

Danach ergibt sich:

$$f'_{ij}^{(k)} = \left( \frac{\partial f_i}{\partial v_j} \right)^{(k)} = \left[ a_{ij} + \left( \sum_{l=1}^n v_l \frac{\partial a_{il}}{\partial v_j} \right) + \frac{\partial b_i}{\partial v_j} \right]^{(k)} \quad i = 1, 2, \dots, n \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (5.21)$$

Die Iteration wird abgebrochen, wenn alle Elemente im Vektor  $\Delta v^{(k)}$  kleiner als die vorgegebene Genauigkeit sind.

Das vorstehend kurz vorgestellte Verfahren kann direkt zur Lösung des im Kapitel 5. dargestellten Strömungsnetzwerks angewandt werden, wenn folgende Zuordnung vorgenommen wird:

$$f \begin{pmatrix} (\Delta P) \\ (\dot{V}_A^2) \\ (\dot{V}_S^2) \\ (\Delta P_{st}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [E_Z] \\ [0] \\ -[V_U] \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} -[Z] \\ [E_{k-1}] & -[B_A]^T \\ [0] & [Z_M] \\ -[Z_v] \end{pmatrix}}_{[A^{(k)}]} \cdot \begin{pmatrix} -[E_Z] \\ [0] \\ [B] \\ [E_Z] \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Delta \bar{P} \\ \bar{V}_A^2 \\ \bar{V}_S^2 \\ \Delta \bar{P}_{st} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\bar{P}_{q, const} \\ \vec{0} \\ (B) \cdot \bar{P}_{q, const} \\ \vec{0} \end{pmatrix} \quad (5.22)$$

$(f(V^{(k)}))$                        $[A^{(k)}]$                        $(b^{(k)})$                        $(r^{(k)})$

### Hardy-Cross Verfahren [31]

Für die Lösung der nichtlinearen Strömungsnetzwerke hat sich das Verfahren nach Hardy-Cross als besonders gut geeignet erwiesen. Es beruht auf dem Gesetz der Massen- und Energieerhaltung und wurde erstmals 1936 eingeführt.

In der Strömungstechnik wird das Verfahren erfolgreich zur Lösung von Netzwerken, die hauptsächlich aus Rohren, Biegungen und T-Verzweigungen aufgebaut sind, eingesetzt.

Das Energieerhaltungsgesetz lautet: In einem geschlossenen Netzwerk ist die Summe des totalen Energieverlustes gleich null.

Bei einem offenen Netzwerk ist der totale Verlust vom Energieverlust am Ausgangspunkt abhängig.

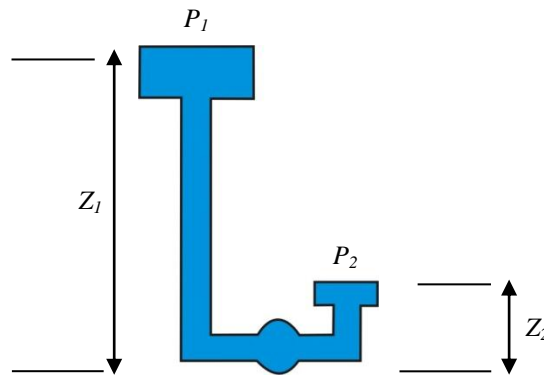


Abbildung 5.6: Offener Zweig

Anhand der Gleichung von Bernoulli kann die Summe aller Verluste ( $h_{1 \rightarrow 2}$ ) zwischen zwei Knoten eines Zweiges (inklusive des Höhenunterschieds und des kinematischen Verlustes)  $h_{1 \rightarrow 2}$  direkt berechnet werden:

$$h_{1 \rightarrow 2} = \frac{p_1 - p_2}{\rho g} + \frac{c_1^2 - c_2^2}{2g} + z_1 - z_2 = \frac{8\dot{V}^2}{\pi^2 g} \sum \left[ \frac{1}{D^4} \left( \lambda \frac{\Delta L}{D} + \xi \right) \right] - \sum h_p + \sum h_t \quad (5.23)$$

Hierbei sind:

$\dot{V}$ : Volumenstrom

$p_1, p_2$ : Druck



$c_1, c_2$ : Strömungsgeschwindigkeiten

Mit  $h_p$  wird der Höhenunterschied und mit  $h_t$  der kinematische Verlust bezeichnet. Die Rohrreibungszahl  $\lambda = f\left(\text{Re}, \frac{D}{k_s}\right)$  und die Widerstandzahl  $\xi$  hängen von der Strömungsgeschwindigkeit ab.

Ein geschlossener Kreis setzt sich aus mehreren Zweigen zusammen (Abbildung 5.7).

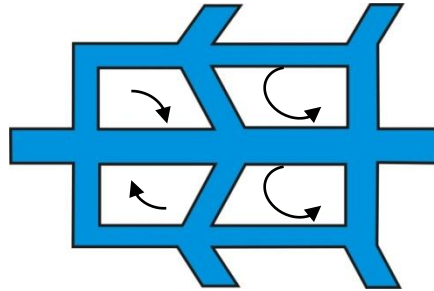


Abbildung 5.7: Geschlossener Kreis aus mehreren Zweigen

Hierbei muss die Summe aller Druckverluste entlang einer geschlossenen Masche gleich null sein:

$$\sum_{j=1}^{n_j} h_j^* = \sum_{j=1}^{n_j} (\delta_{xi} \delta_y \alpha_f \dot{V}^2 - \delta_{xi} \sum h_p + \delta_{xi} \delta_y \sum h_t) \quad (5.24)$$

mit

$$\alpha_f = \frac{8\dot{V}^2}{\pi^2 g} \sum \left[ \frac{1}{D^4} \left( \lambda \frac{\Delta L}{D} + \xi \right) \right], \quad \delta_x = \text{sign}(b - a) \text{ und } \delta_y = \text{sign}(\dot{V}).$$

a, b: Index für Eingang und Ausgang einer Komponente.

Die Lösung der gesuchten Volumenströme erfolgt iterativ.

Wie beim Newton-Verfahren wird beim Hardy-Cross-Verfahren während der Iteration eine Korrektur  $\Delta \dot{V}_{ij}$  der Volumenströme einzelner Zweige eingeführt:

$$\Delta \dot{V}_{ij} = \frac{-\sum_{j=1}^{n_j} h_j^*}{2\delta_x \delta_y \sum (\alpha_f |\dot{V}|)} \quad (5.25)$$

Es bedeuten:  $j$  Nummer des Zweigs,  $i$  Nummer der geschlossenen Masche.

Die Gleichung (5.25) wird mit einem Relaxationsfaktor  $\gamma$  multipliziert und auf die errechneten Volumenströme aufaddiert. Mit den so korrigierten Werten wird die Lösung der Gleichung (5.25) wiederholt:

$$\Delta \dot{V}_{ij}^{n+1} = \dot{V}_{ij}^n + \gamma \Delta \dot{V}_{ij} \quad (5.26)$$

Die Iteration wird so oft fortgesetzt, bis die festgelegte Genauigkeitsschranke für die Volumenströme  $\Delta \dot{V}_{ij}^{n+1}$  unterschritten wird.

Tatsächlich kann das Hardy-Cross-Verfahren als Energieausgleich in einer geschlossenen Masche interpretiert werden:

$$\sum (\pm)_i \left[ R_i \dot{V}_i^2 - (H_p)_i \right] + \Delta H = 0 \quad (5.27)$$

$i$ : Anzahl der Elemente, aus denen eine Masche zusammgebaut ist

$(H_p)_i$ : der durch eine Pumpe verursachte Energieverlust innerhalb eines Kreises

$\Delta H$ : Höhenverlust (gültig für den offenen Kreis)

$R_i$ : der Strömungswiderstand

Um das Hardy-Cross-Verfahren auf einen offenen Zweig anzuwenden, ist es notwendig, in das Netzwerk neue Pseudoelemente einzuführen (siehe Abbildung 5.8). Dann kann ein offener Kreis wie ein geschlossener Kreis behandelt werden. Es ist zu beachten, dass aus dem Pseudoelement kein Volumenstrom fließt [32].

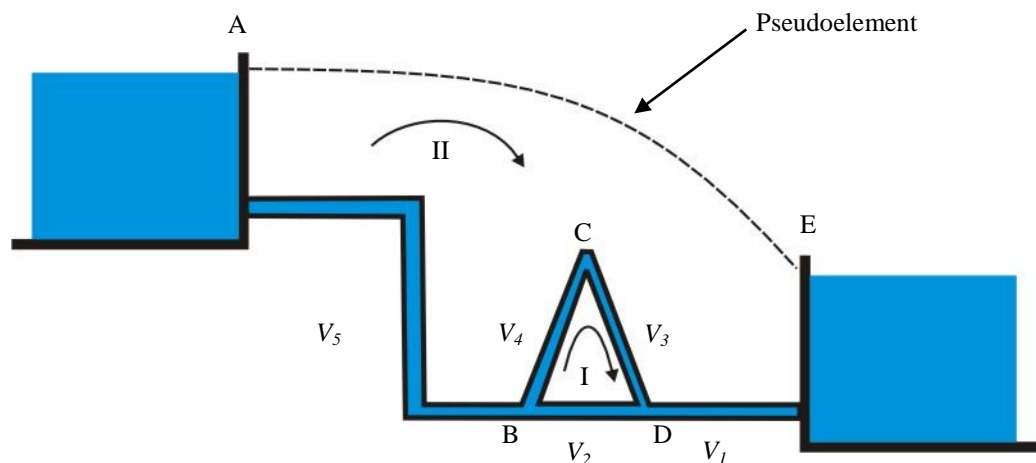


Abbildung 5.8: Erweiterung des offenen Netzwerks um ein Pseudoelement

Bei dem als Beispiel gewählten Strömungsnetzwerk eines luftgekühlten Turbogenerators bildet die Kälteflüssigkeit einen geschlossenen Kreis. Dabei wird jede Masche als ein geschlossener Kreis betrachtet.

Um das vorstehend beschriebene Hardy-Cross-Verfahren zur Lösung dieses Netzwerks anzuwenden, müssen folgende Annahmen gemacht werden:

- 1) Die positive und negative Richtung der Strömung müssen festgelegt werden.
- 2) Die Durchlaufrichtung jeder Masche ist vorgegeben.
- 3) Wie beim Newtonverfahren werden die Anfangsbedingungen der Volumenströme abgeschätzt.
- 4) Für jede geschlossene Masche wird eine eigene Korrektur für die nächste Iteration bestimmt.

Das Linearisierungs-Verfahren [33]

Das eigentliche nichtlineare Gleichungssystem nach Gleichung (3.39) wird durch ein lineares Gleichungssystem angenähert. Vorbereitend für die Linearisierung des Gleichungssystems werden die nichtlinearen Abhängigkeiten für die einzelnen Komponenten so vereinfacht, dass sie sich schließlich über eine lineare Beziehung darstellen lassen.

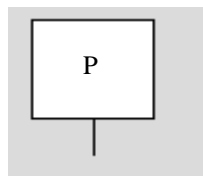
Der Aufwand und die Vorgehensweise bei der Linearisierung sind wesentlich von der Verbindungsanzahl und Verbindungsarten innerhalb des Netzwerks abhängig.

Die Vorgehensweise bei der Linearisierung ist nachfolgend beispielhaft für die Verbindungen der 1. und der 2. Art kurz aufgezeigt.

Wie bereits dargelegt, bestimmen die einzelnen Komponenten im Netzwerk die Höhe des Druckabfalls zwischen den benachbarten Knoten. Sie werden als diskrete Größen vorab ermittelt und geben innerhalb des Netzwerks nicht die Geometrie des nachgebildeten Bereichs wieder.

### 1. Verbindung 1. Art

Ein typisches Beispiel einer solchen Verbindung stellt die Druckabfallquelle dar:



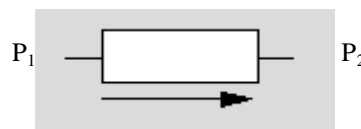
Hierfür lässt sich der Zusammenhang zwischen Druck  $P_1$  und Massenstrom  $\dot{m}_1$  direkt angeben:

$$\dot{m}_1 = K_1 P_1 + b_1 \quad (5.28)$$

$K_1, b_1$  sind konstante Koeffizienten

### 2. Verbindung 2. Art

Für die Komponente mit zwei Verbindungen gilt, dass der Massenstrom am Eingang  $\dot{m}_1$  gleich dem negativen Massenstrom am Ausgang  $\dot{m}_2$  ist:



$$\dot{m}_1 = a_{11}^1 P_1 + a_{12}^1 P_2 + a_{13}^1$$

$$\dot{m}_2 = a_{21}^1 P_1 + a_{22}^1 P_2 + a_{23}^1 \quad (5.29)$$

$$\dot{m}_1 = -\dot{m}_2$$

$a_{11}^1, a_{12}^1, a_{21}^1, a_{22}^1, a_{13}^1, a_{23}^1$  sind unbekannte Koeffizienten.

Nachfolgend wird die Vorgehensweise bei der Bestimmung der Koeffizienten für das Beispiel eines Rohres mit inkompressibel durchfließender Strömung aufgezeigt.

Der Zusammenhang zwischen dem Druckabfall und der Strömungsgeschwindigkeit lautet:

$$\Delta P = \frac{\lambda \rho c^2}{2} \quad (5.30)$$

$\Delta P$  : Druckabfall,  $\lambda$  : Rohrreibungszahl,  $\rho$  : Dichte.

Wird in diese Gleichung die Strömungsgeschwindigkeit  $c$  eingesetzt

$$c = \frac{\dot{m}}{\rho A}.$$

ergibt sich für den Druckabfall

$$\Delta P = \frac{\lambda \dot{m} |\dot{m}|}{2 \rho A^2}. \quad (5.31)$$

Um den Druckabfall durch Höhenverlust zu berücksichtigen, wird die Abhängigkeit gemäß Bernoulli-Gleichung (Gl. 3.40) eingefügt:

$$\Delta P = (P_1 + \rho_1 g z_1) - (P_2 + \rho_2 g z_2) \quad (5.32)$$

$z_1, z_2$  sind hierbei die Eingangs- und Ausgangshöhe des Rohres.

Für die beiden Massenströme ergeben sich folgende Beziehungen:

$$\begin{aligned} \dot{m}_1 &= \underbrace{\frac{-2\rho A^2}{|\dot{m}_1| \lambda} P_1}_{a_{11}^1} + \underbrace{\frac{2\rho A^2}{|\dot{m}_1| \lambda} P_2}_{a_{12}^1} + \underbrace{g(\rho_2 z_2 - \rho_1 z_1)}_{a_{13}^1} \\ \dot{m}_2 &= \underbrace{\frac{2\rho A^2}{|\dot{m}_2| \lambda} P_1}_{a_{21}^1} + \underbrace{\frac{-2\rho A^2}{|\dot{m}_2| \lambda} P_2}_{a_{22}^1} + \underbrace{g(\rho_1 z_1 - \rho_2 z_2)}_{a_{23}^1} \end{aligned} \quad (5.33)$$

Aus Gl. 5.33 können nun die Koeffizienten  $a_{11}^1$   $a_{12}^1$   $a_{21}^1$   $a_{22}^1$   $a_{13}^1$   $a_{23}^1$  entnommen werden:

$$\begin{aligned} a_{11}^1 &= \frac{-2\rho A^2}{|\dot{m}_1| \lambda}, & a_{12}^1 &= -a_{12}^1, & a_{13}^1 &= g(\rho_2 z_2 - \rho_1 z_1) \\ a_{21}^1 &= \frac{-2\rho A^2}{|\dot{m}_2| \lambda}, & a_{22}^1 &= -a_{22}^1, & a_{23}^1 &= -a_{13}^1 \end{aligned} \quad (5.34)$$

Die angestrebte Linearisierung der Beziehungen für die Massenströme  $\dot{m}_1$  und  $\dot{m}_2$  kann somit erfolgreich durchgeführt werden.

Die vorstehend abgeleiteten Beziehungen werden nun zur Aufstellung des Gleichungssystems für das Netzwerk gem. Abbildung 5.9 angewendet.

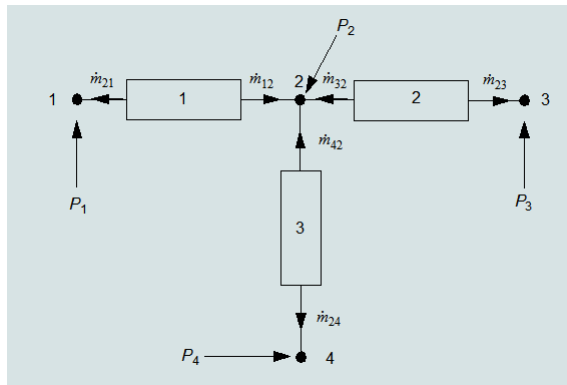


Abbildung 5.9: Netzwerk nach Linearisierung

Vorbereitend für die spätere iterative Lösung des Gleichungssystems werden den einzelnen Knoten die Anfangswerte des Massenstromes zugewiesen, wobei diese so ausgewählt werden müssen, dass die Knotenregel für das Netzwerk eingehalten wird.

Die Indizes der Koeffizienten und Variablen haben folgende Bedeutung:

$k$  : Nummer der Komponente

$m, n$  : Indizierung der Koeffizienten, siehe Gleichungen (5.28) – (5.34)

$\dot{m}_{ab}$  : Massenstrom von Knoten a zum Knoten b

$a$  : Nummer des Knoten

Mit den vorstehend festgelegten Bezeichnungen ergeben sich folgende Ausdrücke für die Massenströme für die drei Komponenten des Netzwerks nach Abbildung 5.10:

Komponente 1:

$$\begin{aligned}\dot{m}_{12} &= a_{11}^1 P_1 + a_{12}^1 P_2 + a_{13}^1 \\ \dot{m}_{21} &= a_{21}^1 P_1 + a_{22}^1 P_2 + a_{23}^1\end{aligned}\quad (5.35)$$

Komponente 2:

$$\begin{aligned}\dot{m}_{32} &= a_{11}^2 P_3 + a_{12}^2 P_2 + a_{13}^2 \\ \dot{m}_{23} &= a_{21}^2 P_3 + a_{22}^2 P_2 + a_{23}^2\end{aligned}\quad (5.36)$$

Komponente 3:

$$\begin{aligned}\dot{m}_{42} &= a_{11}^3 P_4 + a_{12}^3 P_2 + a_{13}^3 \\ \dot{m}_{24} &= a_{21}^3 P_4 + a_{22}^3 P_2 + a_{23}^3\end{aligned}\quad (5.37)$$

Durch Anwendung der Knotenregel ergibt sich:

Knoten 1:

$$\dot{m}_{21} = a_{21}^1 P_1 + a_{22}^1 P_2 + a_{23}^1\quad (5.38)$$

Knoten 2:

$$\dot{m}_{12} + \dot{m}_{32} + \dot{m}_{42} = a_{11}^1 P_1 + (a_{12}^1 + a_{12}^2 + a_{12}^3) P_2 + a_{11}^2 P_3 + a_{11}^3 P_4 + a_{13}^1 + a_{13}^2 + a_{13}^3 \quad (5.39)$$

Knoten 3:

$$\dot{m}_{23} = a_{21}^2 P_3 + a_{22}^2 P_2 + a_{23}^2 \quad (5.40)$$

Knoten 4:

$$\dot{m}_{24} = a_{21}^3 P_4 + a_{22}^3 P_2 + a_{23}^3 \quad (5.41)$$

Die erhaltenen Beziehungen lassen sich in einer Matrixgleichung zusammenfassen:

$$\begin{bmatrix} a_{21}^1 & a_{22}^1 & 0 & 0 \\ a_{11}^1 & a_{12}^1 + a_{12}^2 + a_{12}^3 & a_{11}^2 & a_{11}^3 \\ 0 & a_{22}^2 & a_{21}^2 & 0 \\ 0 & a_{22}^3 & 0 & a_{21}^3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{m}_{21} - a_{23}^1 \\ \dot{m}_{12} + \dot{m}_{32} + \dot{m}_{42} - a_{13}^1 - a_{13}^2 - a_{13}^3 \\ \dot{m}_{23} - a_{23}^2 \\ \dot{m}_{24} - a_{23}^3 \end{bmatrix} \quad (5.42)$$

Hieraus können die gesuchten Drücke  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_3$  und  $P_4$  berechnet werden.

Liegen die Werte vor, so können aus den Gleichungen (5.27) bis (5.30) die zugehörigen Massenströme  $\dot{m}_{ist}$  berechnet werden. Im nächsten Schritt wird die Iteration mit einem verbesserten Massenstrom  $\dot{m}_{neu}$  wiederholt:

$$\dot{m}_{neu} = 0.5\dot{m}_{ist} + 0.5\dot{m}_{alt} \quad (5.43)$$

Diese Iteration wird so lange fortgesetzt, bis die Differenz zwischen  $\dot{m}_{neu}$  und  $\dot{m}_{ist}$  unterhalb der vorgegebenen Genauigkeitsschranke liegt.

Im folgenden Blockdiagramm wird diese Vorgehensweise schematisch dargestellt:

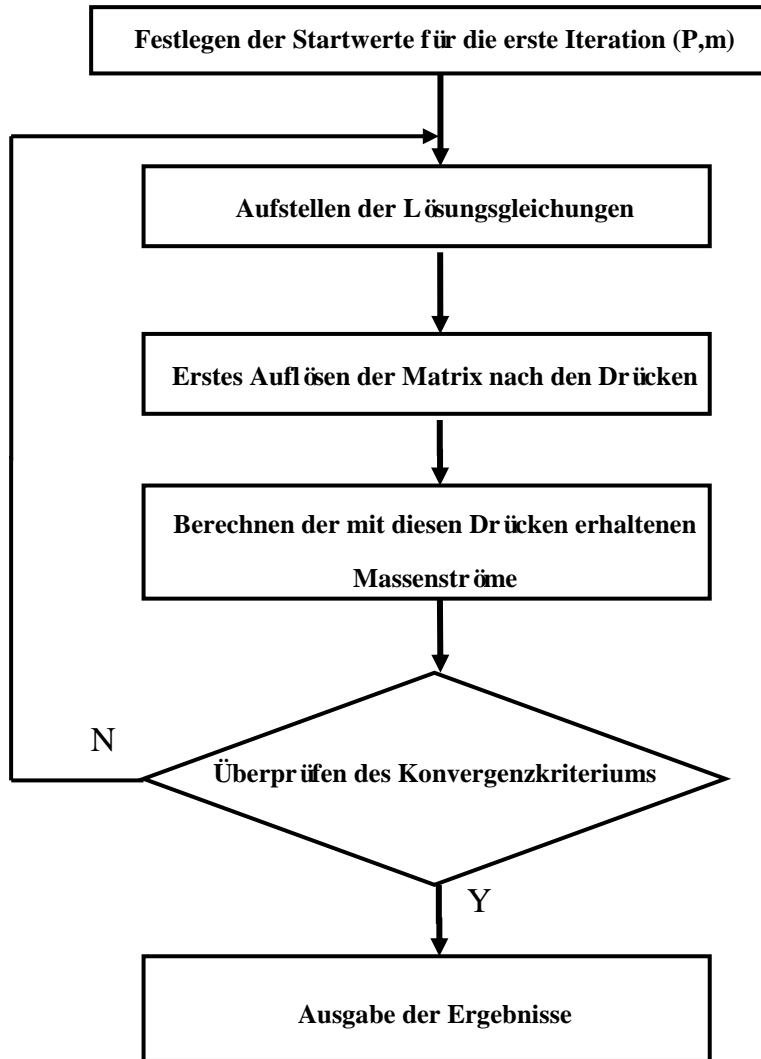


Abbildung 5.10: Blockdiagramm für das Lösungsverfahren bei Einsatz des Linearisierungsverfahrens

---

## Kapitel 6 Berechnung der Volumenströme in einem 200-MVA-Generator

Nachdem die theoretischen Grundlagen erarbeitet wurden und die benötigten Lösungsalgorithmen vorliegen, wird in diesem Kapitel der Frage nachgegangen, ob das neuentwickelte Verfahren, nachfolgend als „klassisches Verfahren“ (ohne Widerstandskennlinien) bezeichnet, in der Lage ist, die Strömungsverteilung in einem realen Generator korrekt zu bestimmen.

Darüber hinaus werden die gewonnenen Ergebnisse mit Hilfe des kommerziellen Netzwerkprogramms *Flowmaster* verifiziert und die Unterschiede zu dem klassischen Verfahren, das auf Netzwerktheorie basiert, herausgearbeitet. Das hierbei behandelte Netzwerk zeichnet sich durch einen höheren Detaillierungsgrad mit vorgegebenen Kennlinien für ausgewählte Komponenten des Generators aus.

Eine solche Vorgehensweise ist insofern aussagekräftig, als dass bei der klassischen Berechnung viele Elemente des Netzwerks durch Messungen an realen Maschinen und Modellen verifiziert und korrigiert werden.

Die Untersuchungen werden am Beispiel eines indirekt luftgekühlten 200-MVA-Generators durchgeführt. Hierzu wird die Maschine als ein mathematisches Modell gemäß der klassischen Netzwerktheorie abgebildet. Wegen der Symmetrie wird nur eine halbe Maschine inklusive der Bereiche vom Lüfter bis zur Kühlkammer berücksichtigt.

Der grundsätzliche Aufbau sowie der Verlauf des Kühlmediums für den untersuchten Generator sind in der Abbildung 6.1 schematisch dargestellt.

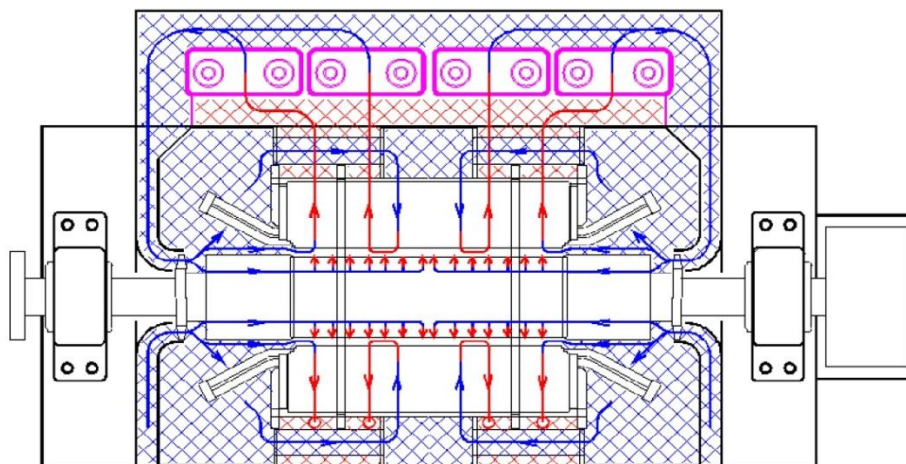


Abbildung 6.1: Querschnitt durch eine luftgekühlte Maschine mit drei Zonen [34]



---

Die detaillierte konstruktive Ausführung der einzelnen Komponenten sowie das angewandte Kühlkonzept wurden im Kapitel 4 ausführlich behandelt.

## **6.1 Die komplexen Komponenten des Kühlkreises**

Nachfolgend werden die Maschinenbereiche bzw. konstruktiven Lösungen analysiert, die sich in einem Netzwerkmodell nicht direkt abbilden lassen und durch Ersatzelemente bzw. Kennlinien berücksichtigt werden müssen.

### **Das Gebläse**

Der Beispielgenerator wird mit zwei einstufigen Axialgebläsen ausgeführt, die an beiden Seiten der Welle zwischen den Lagern und dem Rotorballen montiert sind. Sie erzeugen einen Druckabfall und erzwingen somit die Strömung des Kühlmediums. Bei diesem Konzept wird die gekühlte Luft aus dem Kühler absaugt und in den Generator hineingepumpt. In der Regel werden die Gebläse als eine axiale Pumpe modelliert.

### **Der Ständerwickelkopf**

Der Ständerwickelkopf eines Turbogenerators gehört zu den Komponenten, die bisher nur näherungsweise berechnet werden konnten. Er wird als ein Verbund von Stäben ausgeführt, die über Bandagen, Distanzklötze und Kunststoffringe zusammengehalten werden. Zwischen den Stäben verbleiben kleine Spalte, so dass das Kühlmedium nicht nur entlang der beiden kegelförmigen Flächen, sondern auch zwischen den einzelnen Stäben strömen kann. Dabei wird es örtlich stark verwirbelt, wodurch die Erfassung der Zusammenhänge zwischen Volumenstrom und Druckabfall in diesem Bereich erheblich erschwert wird. In dem klassischen Netzwerkmodell wird der gesamte Wickelkopfbereich mit einem Widerstand nachgebildet.

Eine erheblich genauere Wiedergabe der Zusammenhänge in diesem Bereich kann mit Hilfe einer Kennlinie erreicht werden. Hierzu sind vertiefende FE-Berechnungen notwendig, die in Kapitel 7 vorgestellt werden.

### **Der Rotorwickelkopf**

Der Rotorwickelkopf besteht ebenfalls aus einzelnen Stäben, deren Fliehkräfte durch eine Läuferkappe aufgenommen werden. Die Läuferkappe wird auf den Generatorballen aufgeschraubt und am anderen Ende durch einen Endring fixiert. Das Kühlmedium strömt in den Spalt zwischen dem Endring und der Läuferwelle hinein, durchsetzt die Stäbe und teilt sich dann in zwei Teilströmungen auf. Der größere Anteil fließt in die Grundkanäle des Ballens, der restliche Anteil fließt über vier große Schlitze in den Luftspalt hinein. Um eine möglichst effektive Kühlung zu erreichen, werden zwischen den Spulen Kunststoffkeile eingesetzt, die die Strömung gezielt an die Stabseiten lenken. Der Hauptstrom wird durch das Gebläse erzwungen. Wegen der Rotation der Maschine bildet sich eine zusätzliche Druckquelle, die den Hauptstrom verstärkt.

---

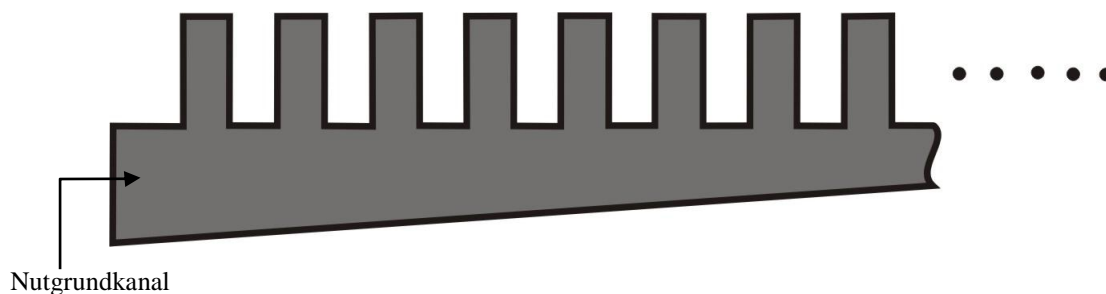
Im klassischen Netzwerk werden die einzelnen Komponenten als ein Widerstand oder eine Druckabfallquelle zusammengefasst. Da jedoch dieser Bereich zu den am höchsten thermisch beanspruchten Bereich im Generator gehört und häufig die Leistungsgrenze bestimmt, wird – analog zum Ständerwickelkopf in einer getrennten FE-Untersuchung die Abhängigkeit des Volumenstroms vom Druckabfall bestimmt und in Form einer nichtlinearen Kennlinie im Modell des Programms Flowmaster berücksichtigt (Kapitel 7).

Die Thermosiphonkühlung, die den Druckabfall in diesem Bereich ebenfalls beeinflusst, wird zunächst vernachlässigt, ihr Einfluss wird im weiteren Verlauf der Untersuchung abgeschätzt.

### **Die Luftschlitze im Läufer**

Eine interessante konstruktive Lösung bei der Gasführung im Läufer ist die unsymmetrische Verengung des Nutgrundkanals. Diese bewirkt, dass der Nutgrundkanal immer enger wird, wodurch die Druckverteilung und dadurch auch die Luftmenge in den Radialkanälen gleichmäßig werden. Dank dieser konstruktiven Lösung gelingt es die Temperaturerhöhung im Generatorballen zu begrenzen und dadurch eine höhere Leistungsdichte zu realisieren.

Eine einfache Modellierung, bei der der Rotor in Teilabschnitte aufgeteilt und jeder dieser Abschnitte durch einen Widerstand repräsentiert wird, reicht nicht aus, um die Gasverteilung ausreichend genau zu bestimmen.



**Abbildung 6.2: Verengung der Nutgrundkanäle im Rotor**

Um die Auswirkung der Verengung zu erfassen, ist auch hier der Einsatz eines FE-Verfahrens zur Bestimmung der nichtlinearen Kennlinie notwendig (Kapitel 7).

### **Der Luftspalt und das Blechpaket**

Der Luftspalt und das Blechpaket werden in axialer Richtung in eine Vielzahl von Abschnitten in der Regel weniger als 10 aufgeteilt, wobei die Schnittebenen so gewählt werden, dass innerhalb eines Segmentes mehrere kleine Pakete zusammengefasst werden. Die dreidimensionalen Blechpaketsegmente werden im Netzwerk über die zugehörigen eindimensionalen Widerstände nachgebildet, die in dem Knoten mit den entsprechenden Luftspaltwiderständen verbunden werden.

---

## Das Gehäuse

Analog zum Blechpaket wird das Gehäuse in axialer Richtung entsprechend der konstruktiven Ausführung in mehrere Luftkammern unterteilt, die durch Blechblenden voneinander getrennt sind. Sie bilden am Umfang des Blechpakets ringförmige Räume, aus denen das Kühlmedium über die Schlitze in das Blechpaket strömt. Die einzelnen Kammern werden durch axialverlaufende Rohre mit dem Kühlmedium gespeist, wodurch gewährleistet wird, dass auch die Bereiche in der Mitte bzw. am anderen Ende des Gehäuses mit kaltem Kühlmedium versorgt werden.

Die Widerstände der Axialrohre und der gespeisten Kammer werden in dem Netzwerk zu einem Gesamtwiderstand zusammengefasst.

Die vorstehend dargestellten Vereinfachungen werden so gewählt, dass einerseits die gewünschte Genauigkeit erzielt werden kann, andererseits die Modellgröße noch überschaubar ist. Hierdurch wird erreicht, dass die Lösung des Gleichungssystems konvergiert und die physikalische Interpretation der Ergebnisse möglich ist.

Dank dieser Vereinfachungen lassen sich vertiefende Untersuchungen zur Bestimmung des Einflusses der physikalischen und geometrischen Parameter auf die Verteilung des Kühlmediums in vertretbarer Zeit durchführen.

## **6.2 Programm *Flowmaster* zur Analyse von Strömungsnetzwerken**

Im Rahmen dieser Arbeit wurde ein neues Computerprogramm entwickelt, in dem das vorstehend beschriebene Newton-Raphson-Verfahren zur Lösung von Beispielnetzwerken erfolgreich angewendet werden konnte. Es erwies sich jedoch für die Lösung von sehr komplexen Netzwerken, wie z. B. das Netzwerk eines Generators, nur als bedingt geeignet. Wegen des fehlenden Präprozessors ist der Aufwand für die Erfassung der Struktur und Aufstellung des Gleichungssystems sehr hoch. Hinzu kommt die ebenfalls sehr aufwendige numerische und graphische Aufbereitung der Ergebnisse.

Aus diesem Grunde wird bei der Untersuchung zusätzlich auf spezielle kommerzielle Software, das *Flowmaster*-Programm zurückgegriffen.

Das Programm wurde von der gleichnamigen Firma *Flowmaster* bereits 1987 zum ersten Mal eingesetzt und ist seit dieser Zeit ständig verbessert worden.

Zu seinen wichtigsten Eigenschaften zählen:

- Das *Graphical User Interface* (GUI), das eine vollständig formalisierte Eingabe der Netzwerktopologie über Knoten und Zweige ermöglicht, so dass ein beliebiges Netzwerk mit geringem Aufwand nachgebildet werden kann.
- Ein großer Katalog von Bausteinen, die direkt ins Netzwerk integriert werden können. Die Bausteine können durch die in Katalogen gespeicherten Elemente oder durch selbst definierte empirische Formen abgebildet und zu einer Topologie verbunden werden. Die Kata-

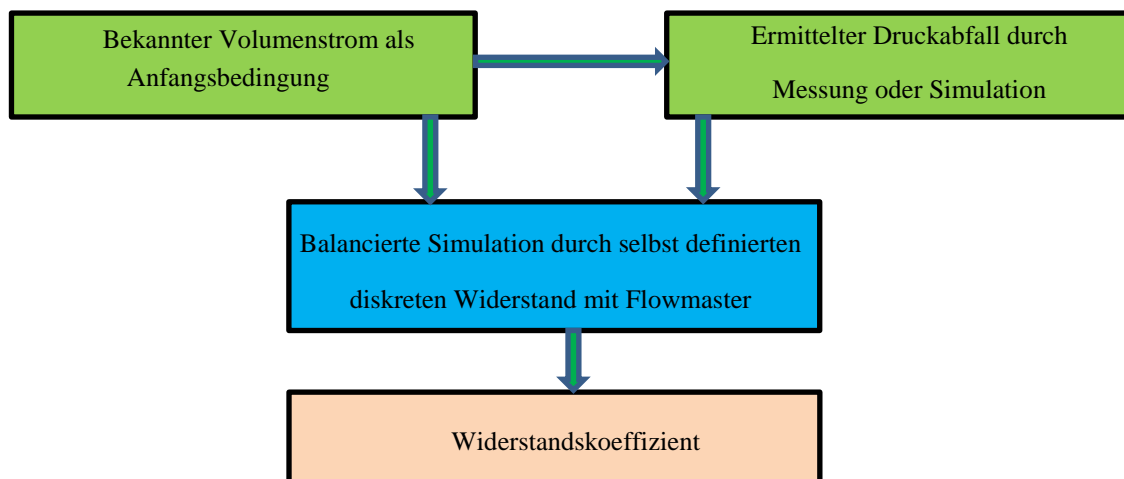
---

loge enthalten nicht nur die Komponenten, sondern schließen alle analytischen Modelle, Materialien, Skripte, Subsysteme und Symbole ein.

- Es können individuell angepasste Komponenten erstellt werden, die auf Standard-Komponenten basieren.
- Da jedoch der Strömungskreislauf des Generators viele Details enthält, die sich über solche Elemente nicht direkt abbilden lassen, werden diese Bereiche durch die sogenannten ECMS-Elemente (*External Component Models*) modelliert. Diese Elemente werden durch den Anwender selbst bestimmt und in das Programm integriert.
- Für die Erfassung von speziellen geometrischen Strukturen, die in den Katalogen nicht vorhanden sind, können Kennlinien angegeben werden. Diese können aus vertiefenden Untersuchungen, Simulationen oder aber aus Messungen vorab bestimmt werden.
- Die Knoten und die Komponenten des Netzwerks werden entsprechend der Position im Netzwerk automatisch nummeriert.
- Das zugehörige Gleichungssystem wird automatisch aufgestellt und mit einem durch *Flowmaster* entwickelten Verfahren, dem sogenannten Linearisierungsverfahren, gelöst.

Die Ergebnisse können in unterschiedlichen Facetten grafisch ausgegeben und in einem Postprozessor bearbeitet werden

Ein weiterer großer Vorteil des Programms *Flowmaster* ist seine Fähigkeit, die Parameter des Netzwerkmodells an die Messergebnisse anzupassen. Dies geschieht mit Hilfe des Verfahrens der „balancierten Simulation“. Die grundsätzliche Vorgehensweise ist in Abbildung 6.3 dargestellt.



**Abbildung 6.3: Der Vorgang der balancierten Simulation**

Die Ergebnisse der numerischen Berechnung werden mit den durch Messung ermittelten Druckabfällen verglichen. Weichen diese wesentlich voneinander ab, werden die wirksamen Parameter des Netzwerkes geändert und die Berechnung erneut gestartet, wobei der Vorgang so lange fortgesetzt wird, bis eine ausreichende Übereinstimmung gefunden wird. Die so ge-

---

wonnenen verbesserten Koeffizienten werden anschließend für die anschließende Optimierung der Kühlgasverteilung verwendet.

Obwohl der Parameterkatalog sehr umfangreich ist und durch die Einfügung von Kennlinien auch nicht typische standardisierte Bereiche erfasst werden können, lassen sich nicht alle konstruktiven Details im Netzwerkmodell wahrheitsgetreu abbilden. Vielmehr müssen Vereinfachungen gemacht werden, die der Tatsache Rechnung tragen, dass bestimmte physikalische Vorgänge innerhalb der Maschine ohne einen großen Aufwand weder berechenbar noch messbar sind. Erwähnt sei an dieser Stelle die Pumpenwirkung des Rotors in Folge der Rotation, die vereinfacht über eine radiale Pumpe simuliert wird.

### 6.3 Erweitertes Netzwerkmodell des Generators

Die ersten Netzwerkanalysen haben gezeigt, dass Ergebnisse mit dem „klassischen Verfahren“ deutlich von den Ergebnissen abweichen, die mit dem *Flowmasters*-Programm gewonnen werden.

Da die Netzwerkparameter des „klassischen Netzwerkes“ mit der Messung abgeglichen wurden, muss davon ausgegangen werden, dass die Ursache der großen Abweichungen zwischen den beiden Verfahren auf die Ungenauigkeiten bei der Parameterbestimmung in *Flowmaster* zurückzuführen sind. Dies ist aufgrund des komplexen konstruktiven Aufbaus des Generators nicht überraschend.

Deswegen wird untersucht, ob die aus den geometrischen Abmessungen gewonnenen Parameter so angepasst werden können, dass die errechneten Volumenströme näher an den gemessenen Werten liegen. Hierfür wird die in *Flowmaster* eingebaute Routine der „balancierten Simulation“ angewandt.

Ergebnisse dieser Untersuchung zeigten jedoch, dass sich hierdurch für den überwiegenden Teil des Generators eine wesentliche Verbesserung der *Flowmaster* Ergebnisse erzielen lässt, jedoch im Bereich der Nutgrundkanäle weiterhin für den Volumenstrom ein Unterschied von 52 % bestehen bleibt. Um diese Diskrepanz zu minimieren, wird im weiteren Verlauf der Untersuchung ein verbessertes Netzwerkmodell für das *Flowmaster* Programm erstellt, in dem der Bereich der Nutgrundkanäle auf noch kleinere Abschnitte aufgeteilt wird, was im Netzwerk zu einer höheren Anzahl von Widerständen in diesem Bereich führt.

Das so erweiterte Netzwerkmodell für das *Flowmaster* Programm ist in Abbildung 6.4 dargestellt. Hierin sind auch die berechneten Volumenströme als Pfeile eingezeichnet: die zugehörigen Werte sind in % angegeben und auf den gesamten Volumenstrom des Gebläses bezogen.

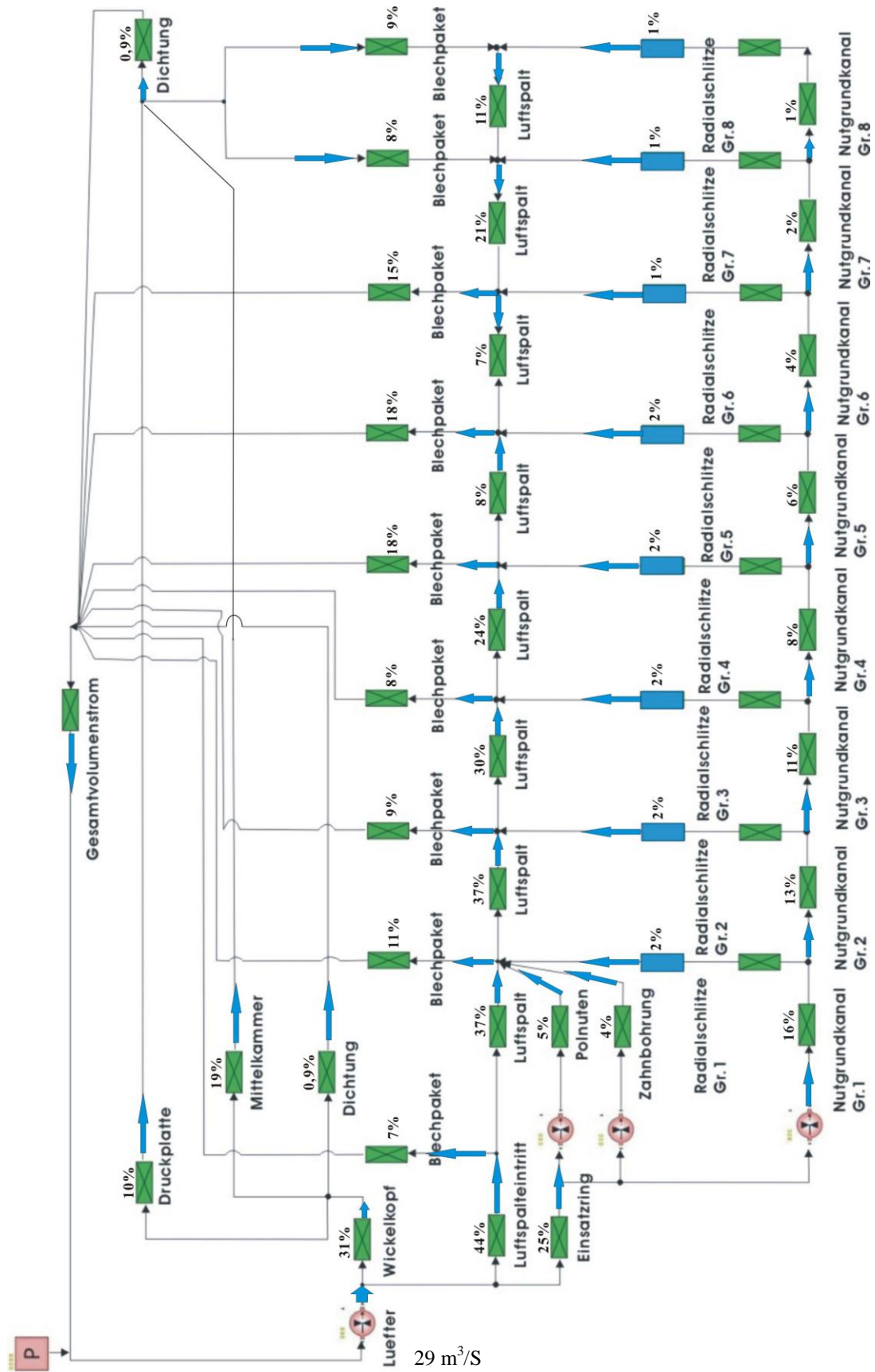


Abbildung 6.4: Erweitertes Netzwerkmodell für die Untersuchung der Kühlmedienverteilung

Der gesamte abgekühlte Volumenstrom wird vom Lüfter angesaugt und in drei Teilströme aufgeteilt. Der größte Teilstrom mit 44 % strömt in den Luftspalt, aus dem die Blechpaketschlitze gleichmäßig über die gesamte Maschinenlänge versorgt werden. Durch die unterschiedlichen Breiten der Einlaufschlitze werden die Volumenströme gesteuert, um die in der Maschine unregelmäßig verteilten Wärmequellen mit einer ausreichenden Menge an Kühlgas zu versorgen. Zum Beispiel werden zur Abkühlung der Druckplatte in der Endzone der Maschine, in der sehr hohe Wirbelstromverluste erzeugt werden, 10% der gesamten Kühlgasmenge verbraucht.

Der zweite Teilstrom gelangt unter dem Kappeneinsatzring zum Nutgrundkanal und von dort über die Radialschlitze erwärmt zum Luftspalt hin. Dank der Verengung der Grundkühlkanäle entlang des Rotors ist der Volumenstrom in den einzelnen Kanälen fast identisch, wodurch sich auch die Temperatur im Lüfterballen ebenfalls gleichmäßig über die Länge ausbildet.

Der dritte Teilstrom dringt in den Wickelkopf ein und strömt von dort in die Mittelkammern und zur anderen Seite des Gehäuses hin. Von dort wird er ebenfalls zum Luftspalt geführt und vermischt sich mit der Luftspaltströmung die direkt von dem Gebläse eingeprägt wird.

Die aus dem Blechpaket ausströmenden Teilströmungen werden zusammengefasst und zum Kühler zurückgeführt.

Der Vergleich der Volumenströme ist in Tabelle 6.1 dargestellt:

| Name und Nummer der Bauelemente im Lüfter | Klassisches Netzwerkmodell<br>(m <sup>3</sup> /s) | Netzwerkmodell mit <i>Flowmaster</i><br>(m <sup>3</sup> /s) | Betrag der Abweichung zwischen beiden Modellen |
|---|---|---|--|
| Lüfter                                    | 29,00   | 29,00   | 0%   |
| Wickelkopf                                | 8,92  | 8,86  | 0,6%   |
| Einsatzring                               | 7,21  | 7,22  | 0,1%   |
| Nutgrundkanal Gr.1                        | 4,90  | 4,91  | 0,1%   |
| Nutgrundkanal Gr.8                        | 0,45  | 0,44  | 0,6%   |
| Radialschlitz Gr.1                        | 0,83  | 0,86  | 3%   |
| Luftspalteintritt                         | 12,86   | 13,10   | 1%   |
| Luftspalt Nr. 8                           | 3,07  | 3,29  | 6%   |
| Blechpaket Nr.1                           | 1,87  | 2,05  | 9%   |

|                 |      |      |    |
|-----------------|------|------|----|
| Blechpaket Nr.9 | 2,62 | 2,84 | 8% |
| Mittelkammer    | 5,73 | 5,65 | 1% |
| Druckplatte     | 2,90 | 2,94 | 1% |

**Tabelle 6.1: Vergleich der Ergebnisse zwischen klassischem Netzwerkmodell und Flowmaster nach Bilanzierung**

Durch Einsatz des Bilanzierungsverfahrens können die Widerstände im *Flowmaster* sehr gut an die des klassischen Netzwerkes „angepasst“ werden, wodurch die Abweichungen zwischen den Volumenströmungen auf maximal 9% reduziert werden. Bei dem untersuchten Generator wurden die Parameter des „klassischen Netzwerkes“ durch die Messung im Prüffeld verifiziert, was jedoch in der Regel der Ausnahmefall ist. Bei der praktischen Auslegung von neuen Maschinentypen muss das angewandte Berechnungsverfahren zuverlässig sein, Fehlkonstruktionen dürfen nicht vorkommen.



---

# Kapitel 7 Einsatz der FE-Methode zur Bestimmung von Widerstandskennlinien

Der konstruktive Aufbau des Generators zeichnet sich durch eine Vielzahl von Bereichen aus, die sich mit Hilfe einfacher Anordnungen nicht nachbilden lassen. Erwähnt seien hier der Rotorballen mit axialen Nutgrundkanälen und mehreren hundert radialen Bohrungen, die Rotorwickelköpfe mit den mehrfach verzweigten Gasführungskanälen oder aber die Ständerwickelköpfe, bei denen das Kühlmedium sich in unterschiedlicher Richtung zwischen den Ständerstäben durchzwingen muss.

Bei der klassischen Modellierung werden diese Bereiche durch konstante Widerstände abgebildet, wobei die Widerstandskoeffizienten aus Messungen an vergleichbaren Anlagen entnommen werden. Eine solche Vorgehensweise stellt eine grobe Näherung dar und berücksichtigt nicht, dass auf Grund von „Ecken und Kanten“ die Strömungsart laminar oder turbulent wird und die Widerstände sich stark in Abhängigkeit von der Strömungsgeschwindigkeit ändern.

Um eine hierdurch verursachte Änderung der Verteilung der Volumenströme zu erfassen, müssen in das Netzwerkmodell für die wichtigsten Bauteile Widerstandskennlinien eingearbeitet werden. Die Bestimmung dieser Kennlinien stellt eine Herausforderung dar, weil sie ausreichend genau nur mit Hilfe der dreidimensionalen FE-Berechnung der Volumenströme bei unterschiedlichen Druckdifferenzen ermittelt werden können.

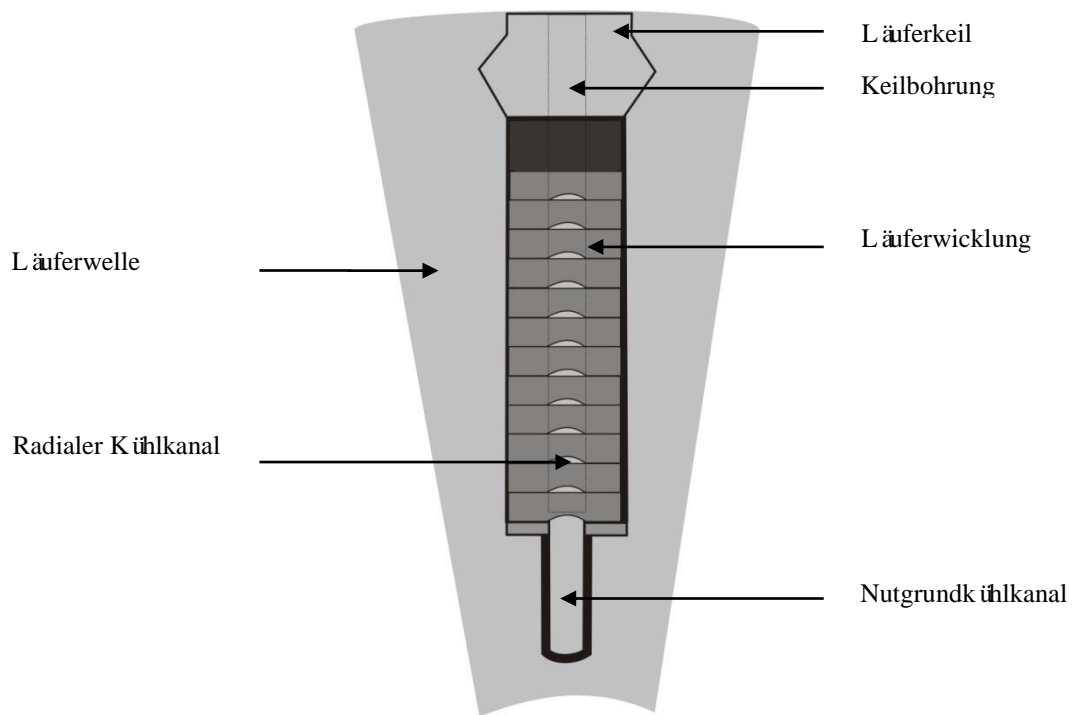
Nachfolgend werden für ausgewählte, besonders komplexe Bauteile des Generators solche Widerstandskennlinien bestimmt und in das erweiterte Netzwerkmodell integriert.

## 7.1 Kühlkanäle und -bohrungen im Läufer

### 7.1.1 Gasführung im Läufer

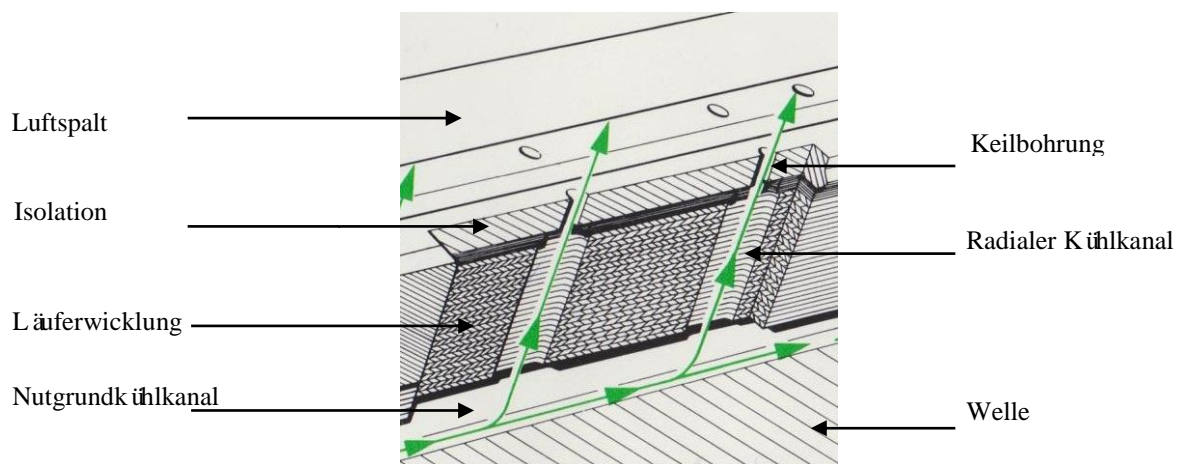
Das gekühlte Gas aus dem Wickelkopf teilt sich in zwei Teilströme:

- den axialen Strom durch die Nutgrundkanäle und
- den radialen Strom durch die in den Stäben gestanzten Kühlkanäle, die durch die überlappenden Schlitze in den Stäben der Rotorwicklung gebildet werden.



**Abbildung 7.1: Querschnitt durch eine Läufernut**

Aus den axialen Nutgrundkanälen strömt das Kühlmedium über die radialen Kühlschlitze zwischen den Stäben und weiter über die Keilbohrung in den Luftspalt hinein (Abbildung 7.2).



**Abbildung 7.2: Längsschnitt durch die Läuferwicklung**

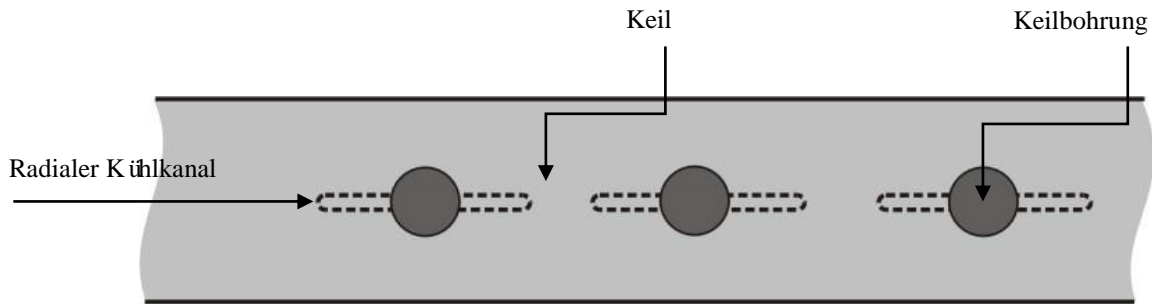


Abbildung 7.3: Läuferkeil mit Bohrungen

Da alle Kühlkanäle des Läufers denselben Aufbau besitzen und am Umfang symmetrisch verteilt sind, wird nachfolgend nur ein Kühlkanal untersucht (siehe Abbildung 7.3).

In Abbildung 7.4 sind der Nutgrundkanal, die radialen Schlitze sowie die Bohrungen in den Keilen dargestellt. Sie bilden die Wege für das Kühlgas, wobei ein kontinuierlicher Druckabfall stattfindet. Die Verengung des Nutgrundkanals in axialer Richtung ist ebenfalls sichtbar.

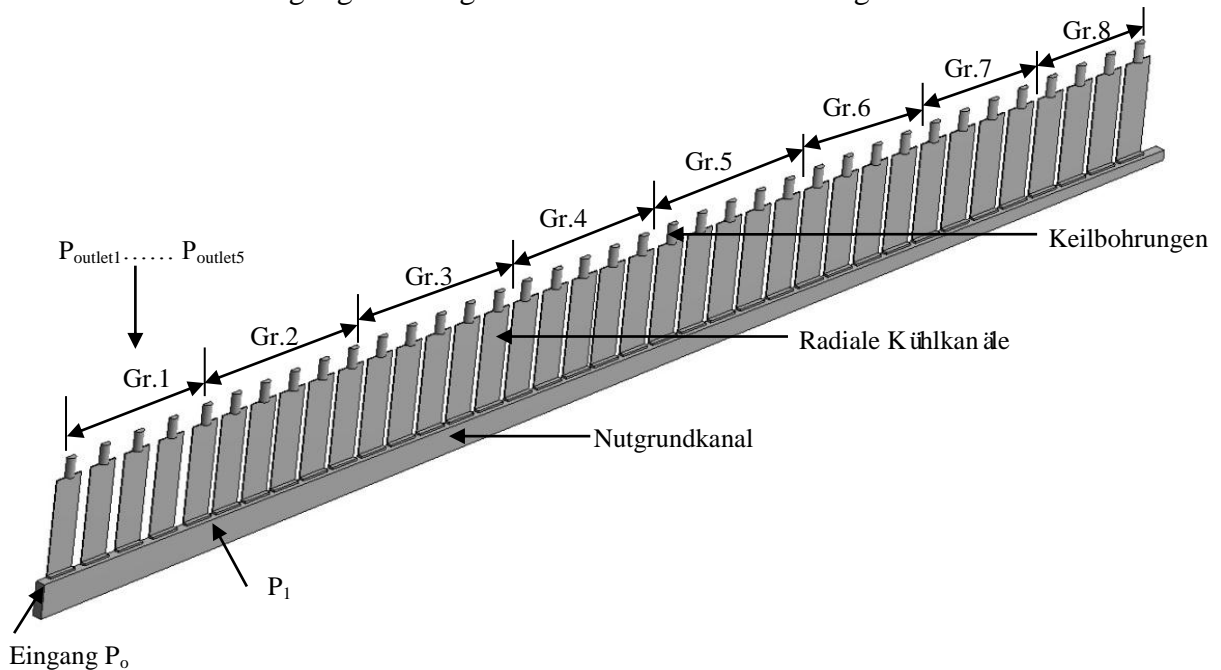


Abbildung 7.4: Skizze eines Kühlkanals im Rotorballen

Um die Anzahl der Auswertorte zu begrenzen und die Ergebnisse überschaubar zu machen, werden die Kühlkanäle in acht Gruppen zusammengefasst und die erhaltenen Ergebnisse innerhalb der Gruppe ermittelt.

Wie vorstehend ausgeführt, bildet der Nutgrundkanal mit den radialen Kühlschlitzen des Läufers eine nichtreguläre geometrische Form, die sich über eine Zusammenschaltung von vorausbestimmten Standardelementen nicht darstellen lässt. Deswegen werden der Luftdruckabfall und die Volumenströme durch eine Simulation mit dem Ansys-Workbench- Programm bestimmt.

---

Hierbei ist es zu beachten, dass durch eine 3-D Simulation die räumliche Verteilung des Kühlmittels in Nutgrundkanälen und Kühlschlitzen ermittelt werden kann, dass es aber unmöglich ist, die Interaktion aus anderen verbundenen Kühlkanälen im gesamten Rotorballen zu bestimmen. Um diese zu berücksichtigen, müssten die Kühlkanäle in Form von abstrakten Widerstandskennlinien abgebildet und anschließend in das gesamte Strömungsnetzwerk integriert werden.

Für ein derartig aufgebautes Netzwerkmodell werden mit Hilfe von *Flowmaster* die Volumenströme berechnet und mit den Ergebnissen für das klassische Netzwerk verglichen.

### 7.1.2 FE-Modell des Kühlkanals im Rotorballen

Der gesamte Bereich, bestehend aus dem Nutgrundkanal, den radialen Schlitzen und den Keilbohrungen, wird mit dreieckigen Elementen vernetzt (siehe Abbildung 7.5). Wegen der Symmetrie gegenüber der axialen Schnittebene genügt es, nur den halben Bereich zu betrachten.

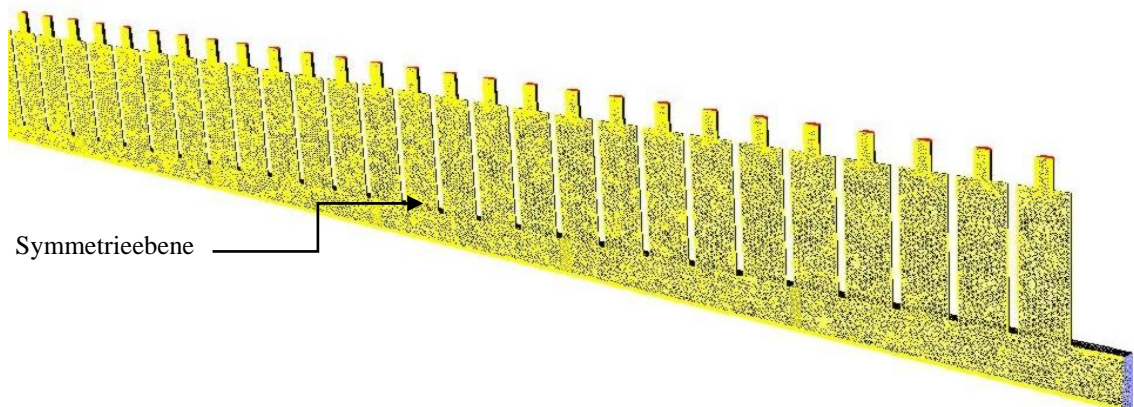


Abbildung 7.5: Vernetzung der Kühlkanäle im Rotorballen

Bekanntlich ist die Geschwindigkeit in der Nähe der Wände kleiner als in der Bohrungsmitte. Um die Änderung der Geschwindigkeit über den Bohrungs- bzw. Schlitzradius zu erfassen, muss bei der Vernetzung eine hohe Netzdichte generiert werden. Dies kann durch die Verwendung von sogenannten Inflationsschichten realisiert werden.

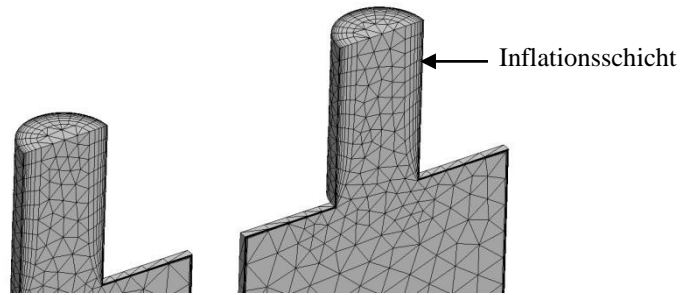


Abbildung 7.6: Inflationsschicht an der Kante des Querschnitts

Das Rechengebiet erstreckt sich auf den Nutgrundkanal und 32 radiale K ühlschlitze und Keilbohrungen [35].

### 7.1.3 FE-Simulation mit dem Programm *Fluent*

Da die Luft in den K ühlkan älen des L äufers mit hoher Geschwindigkeit einstr ömt, wird die Simulation mit dem  $(\kappa, \varepsilon)$ -Modul durchgef öhrt, das im Ansys-Workbench enthalten ist. Dieses Modul wurde entwickelt, um Vorg änge f ör vollturbulente Str ömungen zu simulieren[24].

Die Gr ö ß e  $\varepsilon$  bezeichnet den Anteil der spezifischen Turbulenzenergie  $\kappa$ , die durch Turbulenzerscheinungen pro Zeiteinheit in W ä rme umgewandelt wird. Die Gr ö ß e  $\varepsilon$  gibt die Dissipationsrate der Turbulenzenergie an.

Der Einsatz des  $(\kappa, \varepsilon)$ -Modells f ö r die L ö s ung der Str ö mungsverteilung hat sich als sehr erfolgreich erwiesen. Bereits nach 50 Iterationsschritten ergaben sich stabile Werte f ö r die gesuchten Gr ö ß en (Beispiel in Abbildung 7.7: Gasgeschwindigkeiten).

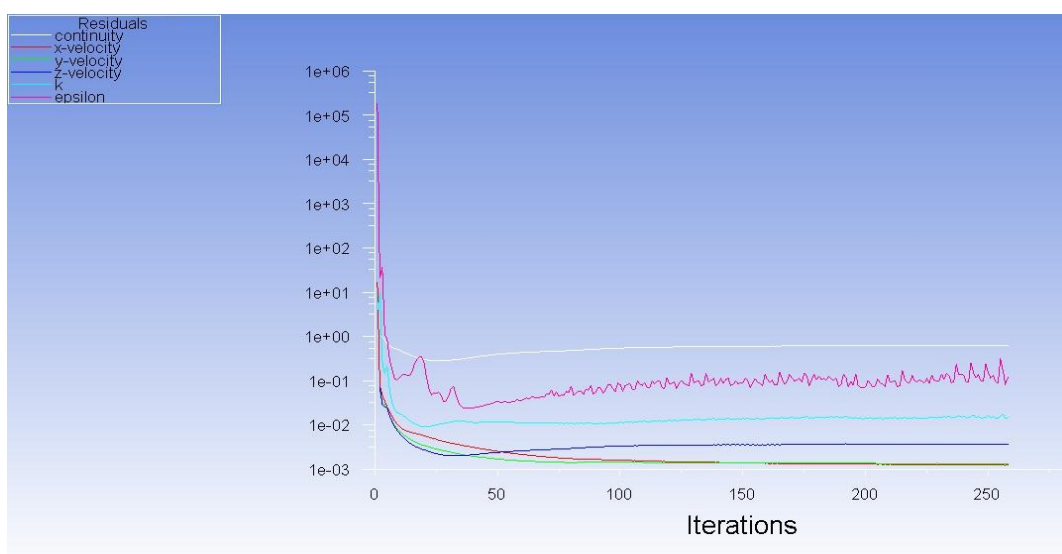
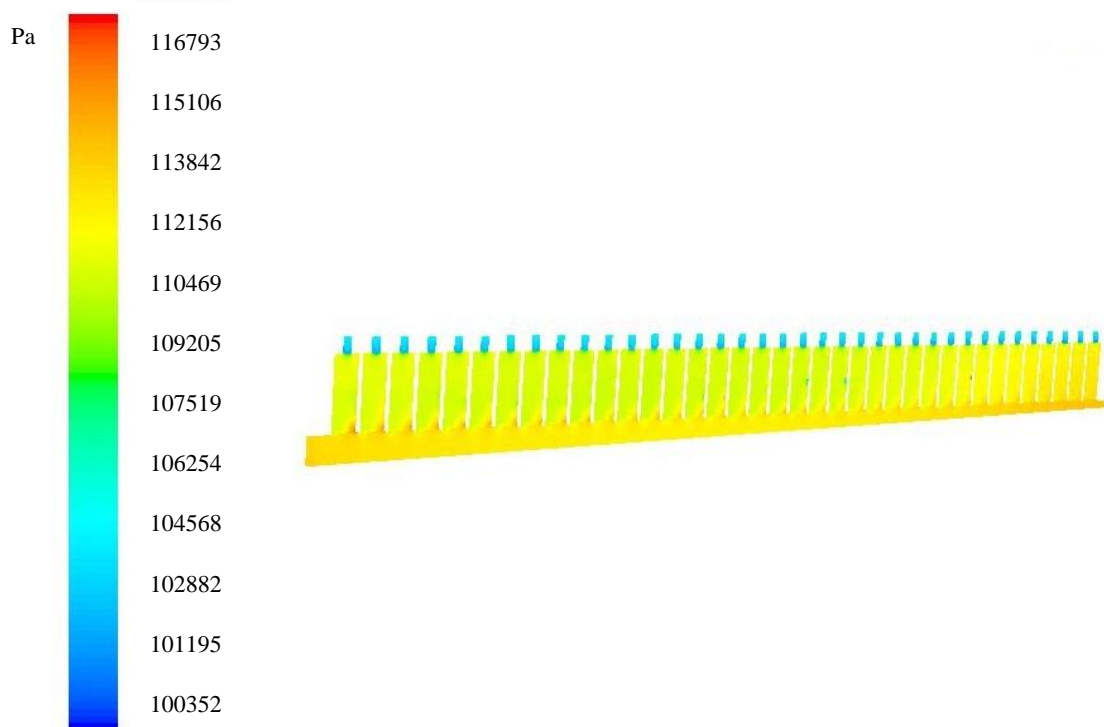


Abbildung 7.7: Konvergenz beim Einsatz des  $(\kappa, \varepsilon)$  Modells

---

Aus den Ergebnissen der FE-Berechnung lässt sich die Verteilung des statischen Luftdrucks entlang des Nutgrundkanals, der Kühlschlitze und Keilbohrungen bestimmen (siehe Abbildung 7.8):



**Abbildung 7.8: Verteilung des statischen Luftdrucks (in Pascal)  
in den Kühlkanälen des Läufers**

Bei der hier analysierten konstruktiven Ausführung verengt sich der Nutgrundkanal entlang des Ballens, wodurch auch der statische Druck im Nutgrundkanal in axialer Richtung stetig steigt.

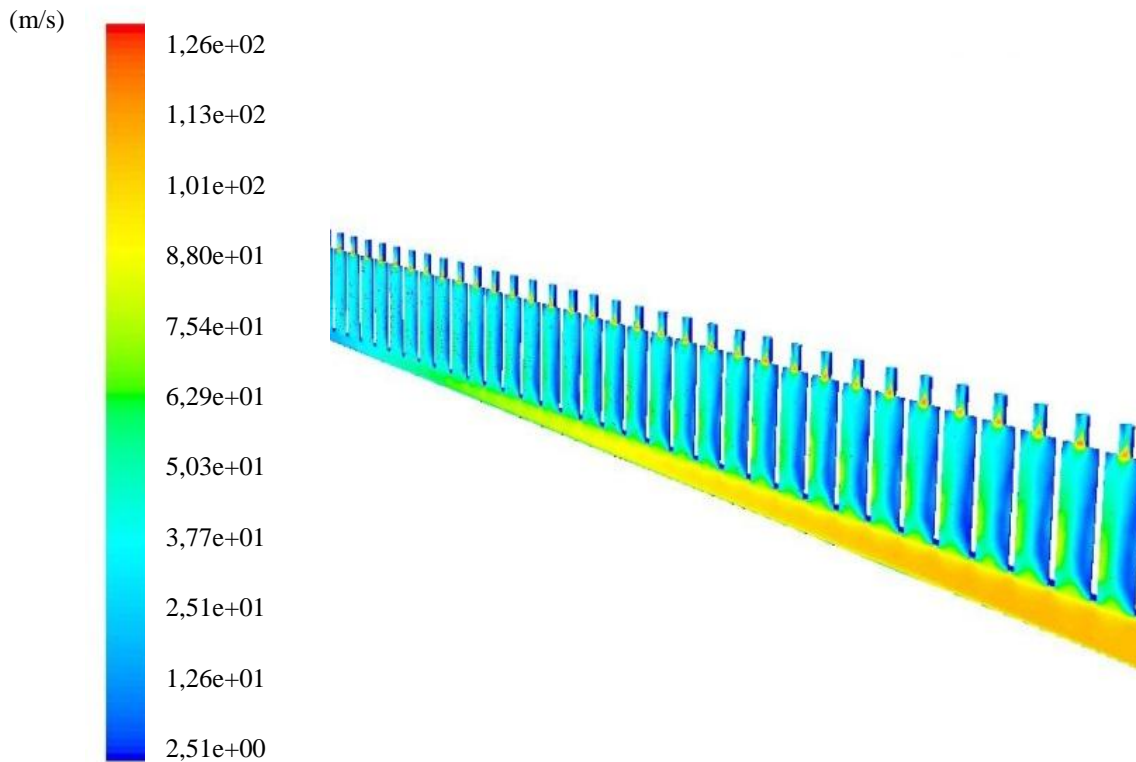
| Nr. Gruppe | Statischer Luftdruck am Ausgang der Keilbohrung (Luftspalt) (bar) | Statischer Luftdruck im Nutgrundkanal (bar) | Luftdruckabfall in radialer Richtung (bar) | Luftdruckabfall im Nutgrundkanal in axialer Richtung (bar) |
|------------|---|---|--|--|
| 1          | 0,99  | 1,11  | 0,12                                       | 0,014  |
| 2          | 0,99  | 1,09  | 0,10                                       | 0,001  |
| 3          | 0,99  | 1,09  | 0,10                                       | 0,001  |
| 4          | 0,99  | 1,09  | 0,10                                       | -0,001   |
| 5          | 0,99  | 1,09  | 0,10                                       | -0,004   |
| 6          | 0,99  | 1,09  | 0,11                                       | -0,005   |
| 7          | 0,99  | 1,10  | 0,11                                       | -0,008   |
| 8          | 0,99  | 1,11  | 0,12                                       | -0,004   |

**Tabelle 7.1: Der Luftdruckabfall im Kühlkanal des Läufers**

In Abbildung 7.9 ist dieses Verhalten durch die Änderung des Farbtons vom „schwachen“ Gelb zum „intensiven“ Gelb sichtbar. In radialer Richtung nimmt der Druck entlang der Kühlschlitze und der Keilbohrungen deutlich ab.

Die Zahlenwerte sind gemittelt für die Gruppen 1 bis 8 (siehe Abbildung 7.4) in der Tabelle 7.1 dargestellt.

Der vorstehend bestimmten statischen Druckverteilung entsprechen die in Abbildung 7.10 dargestellten Strömungsgeschwindigkeiten.



**Abbildung 7.9: Verteilung der Strömungsgeschwindigkeit in den Kühlkanälen des Läufers**

Im Nutgrundkanal erreicht das Kühlmedium eine Geschwindigkeit von ca. 100 m/s. Im Bereich der Nutschlitzte und Keilbohrungen fällt diese deutlich auf ca. 50 m/s ab. Die Verteilung der Geschwindigkeit in den Schlitzten und in den Keilbohrungen ist ungleichmäßig. In den Kühlschlitzten auf der angeströmten Seite wird das Kühlmedium stark auf ca. 2.5 m/s abgebremst, während in der Mitte und an der gegenüberliegenden Seite Geschwindigkeiten von 70 m/s erreicht werden. Bemerkenswert ist, dass sich am Übergang zwischen den Kühlschlitzten und Bohrungen eine stark turbulente Strömung ausbildet. Die Geschwindigkeiten in diesem Bereich erreichen örtlich 120 m/s. Für die ermittelte Geschwindigkeitsverteilung lassen sich direkt die Volumenströme bestimmen.

Sie sind für die betrachteten acht Gruppen in der Tabelle 7.2 enthalten.

| Nr. Gruppe | Volumenstrom in radialer Richtung ( $\text{m}^3/\text{s}$ ) | Volumenstrom in axialer Richtung ( $\text{m}^3/\text{s}$ ) |
|------------|---|--|
| 1          | 0,66  | 4,90   |
| 2          | 0,64  | 4,24   |
| 3          | 0,64  | 3,59   |
| 4          | 0,64  | 2,95   |



|   |      |      |
|---|------|------|
| 5 | 0,64 | 2,30 |
| 6 | 0,53 | 1,65 |
| 7 | 0,55 | 1,11 |
| 8 | 0,56 | 0,56 |

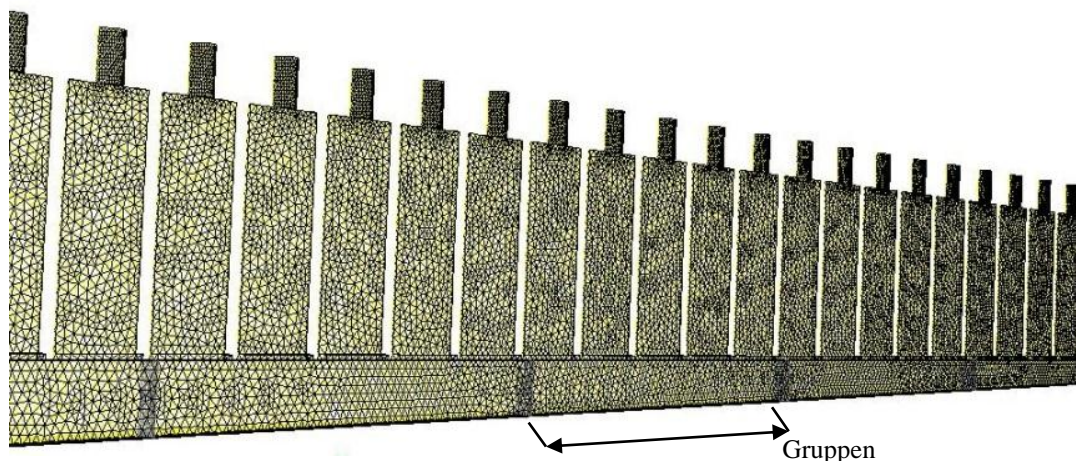
**Tabelle 7.2: Volumenströme in den Kühlkanälen des Läufers**

Erwartungsgemäß nimmt der axiale Volumenstrom im Nutgrundkanal kontinuierlich ab, weil die Teilströme über die Radialkanäle zum Luftspalt hin abfließen. Demgegenüber ändern sich die Volumenströme in radialer Richtung nur gering, sodass die gewünschte fast gleichmäßige Wicklungskühlung entlang des Ballens erreicht wird.

#### 7.1.4 Bestimmung der Koeffizienten für die Ersatzwiderstände

Die Ergebnisse der FE-Berechnung werden anschließend in das erweiterte *Flowmaster*-Netzwerkmodell integriert. Hierzu müssen aus den erhaltenen Ergebnissen für die Verteilung der Volumenströme die zugehörigen Ersatzwiderstände bestimmt werden. Diese werden für die einzelnen Gruppen zusammengefasst, wobei angenommen wird, dass in den Nutgrundkanälen die Volumenströme gleichmäßig verteilt sind.

Im betrachteten Beispielrotor sind insgesamt 37 radiale Kühlschlitze gefräst, die auf acht Gruppen aufgeteilt werden. In den ersten fünf Gruppen werden fünf radiale Kühlkanäle pro Gruppe zusammengefasst, in den restlichen drei Gruppen vier (siehe Abbildung. 6.4).



**Abbildung 7.10: Aufteilung der Kühlschlitze in Gruppen**

Vorbereitend für die Bestimmung der Ersatzwiderstände werden die radialen Druckabfälle bestimmt. Sie errechnen sich als Differenz des mittleren Drucks und des Drucks an dem Ort, wo die Gruppe beginnt (siehe Abbildung 7.5). Somit beträgt der Luftdruckabfall zwischen

den Ausgängen 1 bis 5 an den Keilbohrungen und dem Eingang zum Nutgrundkanal für die Gruppe 1:

$$\left( \frac{\sum_{n=1}^5 P_{radial(n)}}{5} \right) - P_0 = \Delta P_{radial-Gr1} \quad (7.1)$$

Für die Gruppen 2 bis 8 gilt entsprechend:

$$\left( \frac{\sum_{n=6}^{10} P_{outlet(n)}}{5} \right) - P_1 = \Delta P_{radial-Gr2} \quad (7.2)$$

$$\left( \frac{\sum_{n=34}^{37} P_{outlet(n)}}{4} \right) - P_7 = \Delta P_{radial-Gr8} \quad (7.3)$$

Die Luftdruckabfälle entlang des Nutgrundkanals können durch Subtraktion der Drücke an den Grenzen der einzelnen Gruppen gebildet werden. Hiernach ergeben sich die Druckabfälle für die Gruppen 1 bis 8:

$$\begin{aligned} \Delta P_{Grund-Gr1} &= P_1 - P_0 \\ \Delta P_{Grund-Gr2} &= P_2 - P_1 \\ &\vdots \\ \Delta P_{Grund-Gr8} &= P_7 - P_6 \end{aligned} \quad (7.4)$$

Bei der Bestimmung des gesamten Volumenstroms einer Gruppe muss berücksichtigt werden, dass der Rotor 32 Nuten enthält, die strömungstechnisch parallel geschaltet sind, und dass bei der FE-Simulation nur die Hälfte des Bereichs nachgebildet wird (siehe Abbildung 7.5).

Somit ergibt sich z. B. für die erste Gruppe der gesamte Volumenstrom durch die radialen Schlitz:

$$Q_{radial-Gr1} = \left( \sum_{n=1}^5 Q_{radial(n)} \right) \cdot 32 \cdot 2$$

und der Volumenstrom durch den Nutgrundkanal

$$Q_{Grund-Gr1} = Q_{Ebene-1} \cdot 32 \cdot 2 \quad (7.5)$$

$Q_{Ebene-1}$ : Volumenstrom durch die in Abbildung 7.5 definierte Ebene 1.

Die Volumenströme für die anderen sieben Gruppen errechnen sich analog.

Die vorstehend ermittelten Werte für die Druckabfälle und Volumenströme werden nun als Eingabedaten in das Programm Ansys-Workbench-Fluent eingespeist und anschließend werden mit Hilfe des in Kapitel 6 dargestellten Verfahrens der „balancierten Simulation“ die Widerstandskoeffizienten für die einzelnen Gruppen bestimmt.

Der in diesem Kapitel behandelte Teilbereich der Kühlkanäle im Rotor kann somit durch ein reduziertes Netzwerk abgebildet und über Parameter beschrieben werden (Abbildung 7.11).

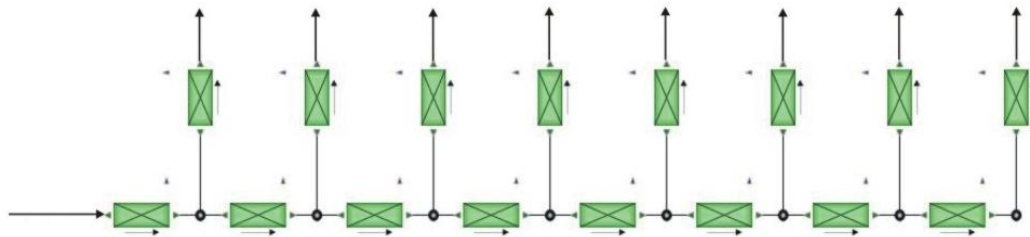


Abbildung 7.11: Ersatznetzwerk für die Rotorkühlkanäle

## 7.2 Ständerwickelkopf

Die Wickelköpfe von großen elektrischen Maschinen zeichnen sich durch einen sehr heterogenen dreidimensionalen Aufbau aus, der der analytischen Berechnung nur sehr schwer zugänglich ist.

Es handelt sich hier um einen Verbund aus Kupferstäben, Versteifungsringen aus Hartkunststoff und Stützkonsolen aus Stahl, die miteinander durch Bandagen oder durch in Harz getränkte Kunststoffstricke zu einem elastischen Ring verbunden sind. Die Ständerstäbe werden auf einem Kegel gewickelt und bilden geometrisch betrachtet sich nach außen hin öffnende Evolventen.

Bei Nennbetrieb fließen in der Ständerwicklung sehr hohe elektrische Ströme, die in den Maschinen einen großen Strom von bis zu 30 kA erreichen können. Sie verursachen sehr hohe Kupferverluste in den Stäben, die durch das umströmende Kühlgas abgeführt werden müssen. Ein Teil dieser Verluste wird über die Stäbe zum Blechpaket geleitet, das sich in diesem Fall wie ein großer Kühlkörper verhält.

Eine der häufigen Schadensursachen in großen elektrischen Maschinen sind Beschädigungen der Stabisolation durch zu hohe Erwärmungen und hierdurch verursachte Isolationsdurchschläge.

Der Ausfall einer Maschine bedeutet häufig einen mehrmonatigen Stillstand der ganzen Anlage, wodurch dem Betreiber erhebliche Kosten entstehen.

Vor diesem Hintergrund ist es notwendig, die Volumenströme im Bereich des Ständerwickelkopfs möglichst exakt zu bestimmen. Hierfür werden nachfolgend zunächst das FE-Modell des Wickelkopfs erstellt und mit Hilfe des FE-Programms Ansys-Fluent die entsprechenden

---

Widerstandskennlinien bestimmt. Diese werden anschließend in das *Flowmaster*-Programm eingeführt.

### 7.2.1 FE-Modell des Ständerwickelkopfes

Abbildung 7.12 zeigt den konstruktiven Aufbau eines typischen freischwingenden Wickelkopfs von elektrischen Maschinen großer Leistung. Zwischen den Stäben bildet sich ein Spalt aus, der durch die Bandagen und die Distanzstücke unterbrochen wird. Der Hauptteil des Kühlmediums umströmt den Wickelkopf sowohl außen als auch innen. Aufgrund der unterschiedlichen Drücke dringt jedoch ein Teil durch die Spalte zwischen den Stäben und verbessert damit wesentlich den Kühleffekt.

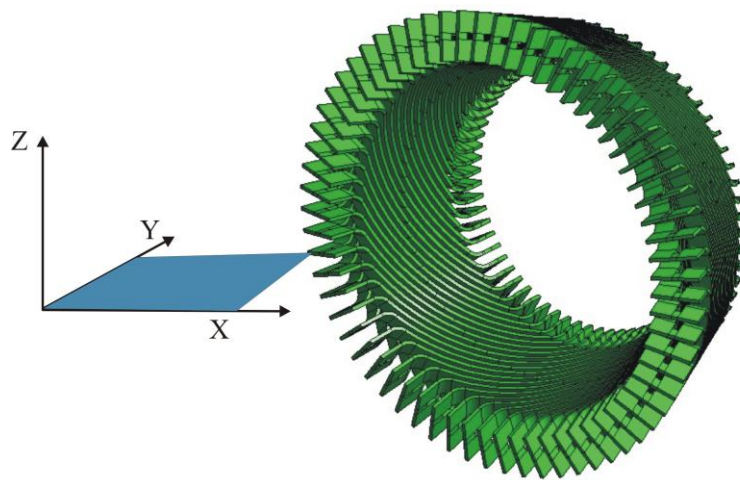
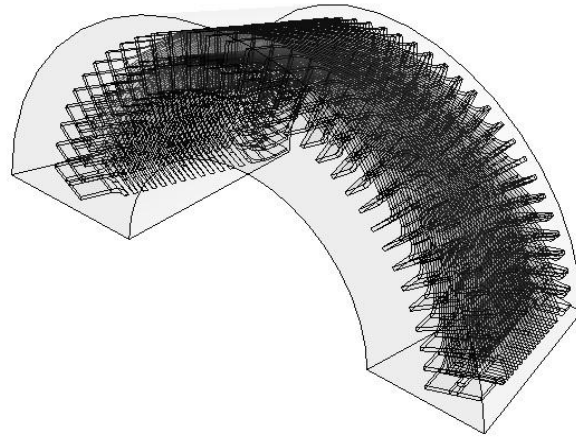


Abbildung 7.12: CAD-Modell eines Ständerwickelkopfes

Wegen der zu X,Y Ebene Symmetrie wird nachfolgend nur die Hälfte des Wickelkopfbereichs untersucht.

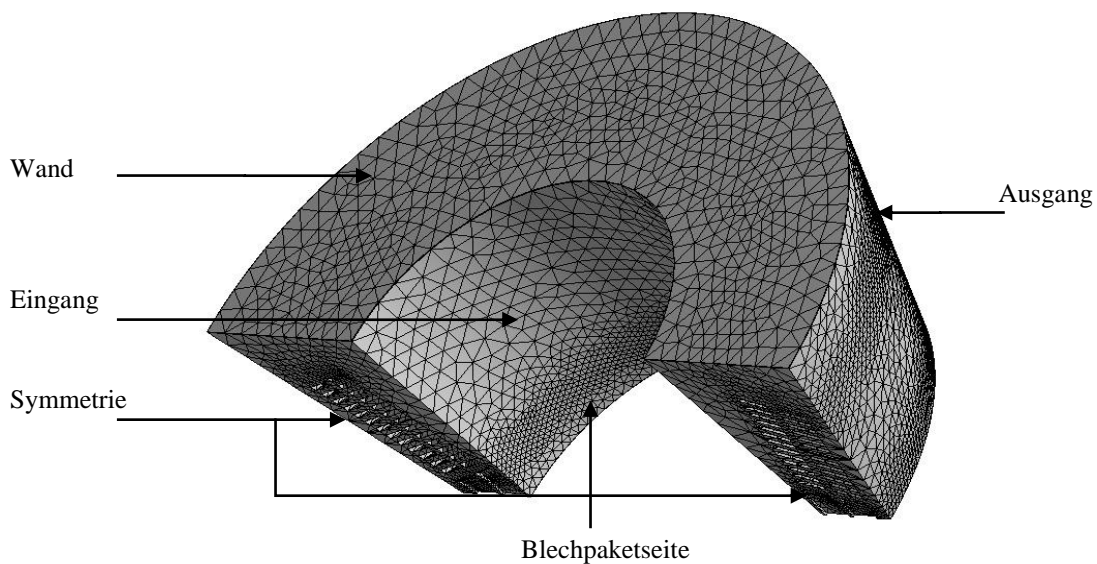
Für die Untersuchung der Volumenstromverteilung müssen die relevanten Gebiete abgebildet werden, durch die diese Strömung geführt wird, d. h. die Luftspalte zwischen den Stäben und die Räume außerhalb und innerhalb der ringförmigen Struktur. Somit muss zu dem Wickelkopfmodell in Abbildung 7.12 ein komplementärer Raum gebildet werden (siehe Abbildung 7.13).



**Abbildung 7.13: Geometrische Kontur des Ständerwickelkopfes mit dem umhüllenden Luftraum**

Da der zu modellierende Bereich leerer Raum (Luft) ist, müssen alle Metall- und Kunststoffteile in diesem umhüllten Raum in „Negative“ umwandelt werden. Der Raum wird durch die Außenwände des Gehäuses begrenzt. Auf diese Weise entsteht für den Wickelkopf ein Modell, in dem alle wesentlichen Strömungswege enthalten sind. Es ist sehr gut zur Analyse der Abhängigkeiten zwischen Luftdruckabfällen und Volumenströmen geeignet.

Vorbereitend für eine FE-Simulation wird der gesamte „Negative Raum“ vernetzt (Abbildung 7.14):

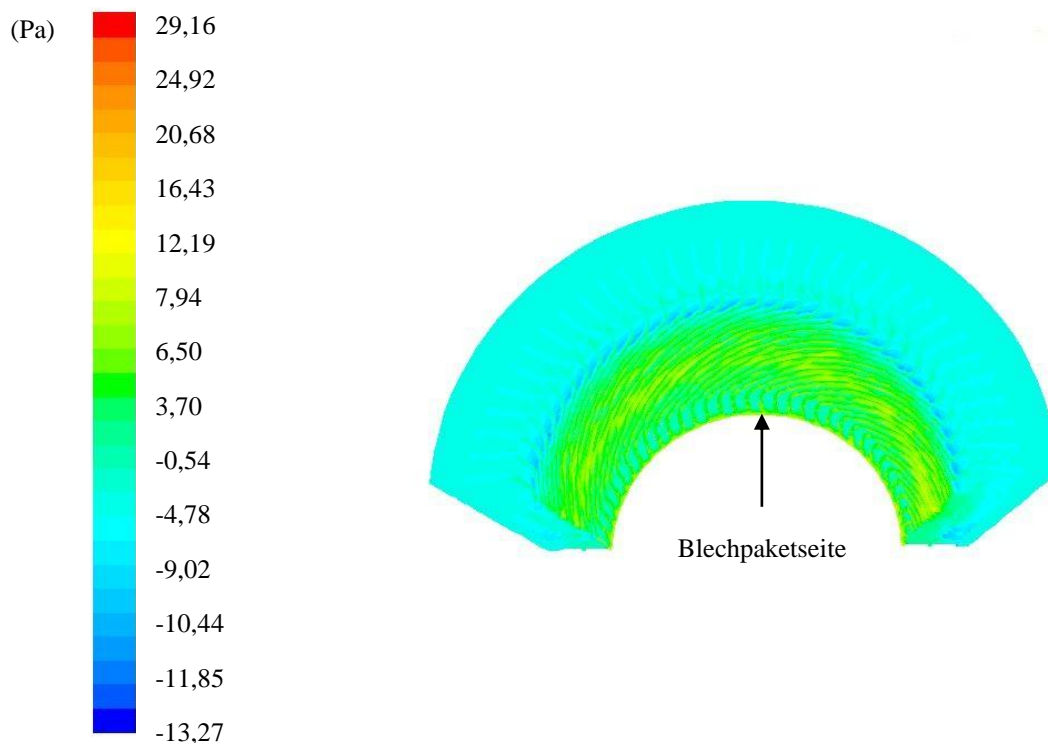


**Abbildung 7.14: Negativ des Ständerwickelkopfes**

## 7.2.2 Widerstandskennlinie des Ständerwickelkopfes

Für die Bestimmung der Widerstandskennlinie des Wickelkopfes wird davon ausgegangen, dass das Kühlmedium von der Innenseite des Kegels durch die Spalte zwischen den Stäben nach außen strömt. In der Simulation werden die Volumenströme ermittelt, die sich bei unter-

schiedlichen Werten für den Außen- und Innendruck  $P_{\text{außen}}$ ,  $P_{\text{innen}}$  einstellen. In Abbildung 7.15 ist die statische Druckverteilung für die Variante  $P_{\text{außen}}=2,34$  Pa und  $P_{\text{innen}} = 14,74$  Pa dargestellt.

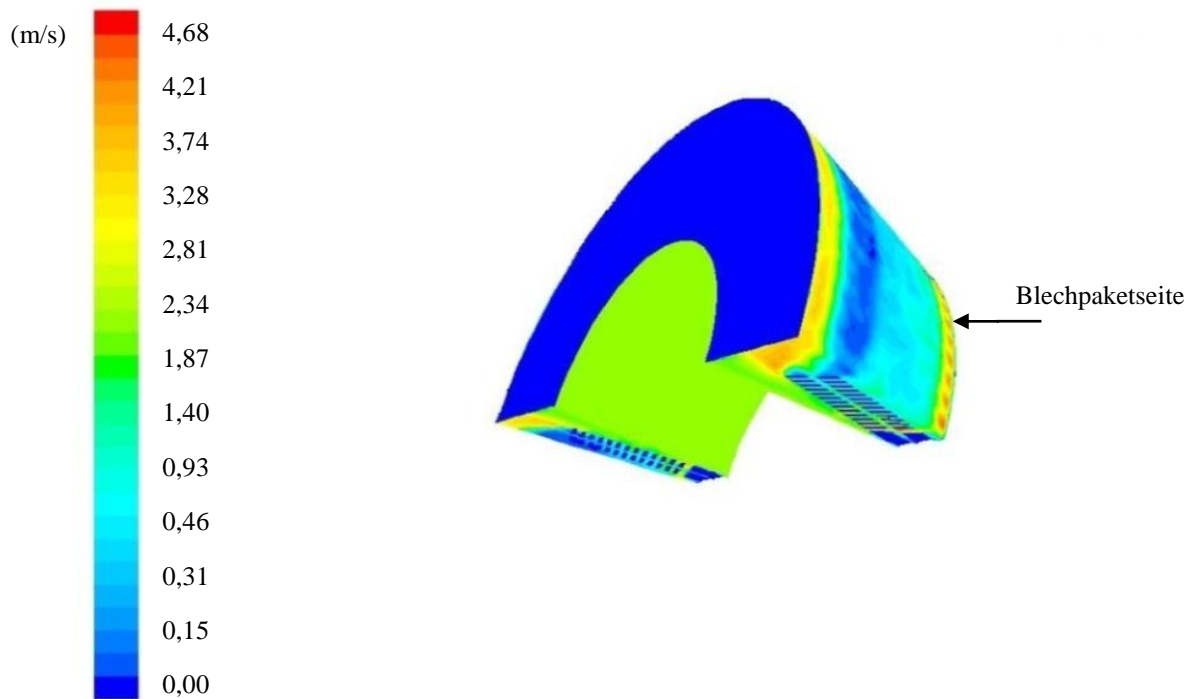


**Abbildung 7.15: Statische Luftdruckverteilung innerhalb des Wickelkopfes**

Als Anfangsbedingung an der inneren Fläche wird die mit klassischen Modellen ermittelte Strömungsgeschwindigkeit von 2,6 m/s zu Grunde gelegt. Da diese gering ist, kann angenommen werden, dass es sich hierbei um eine laminare Strömung handelt, deren Reynoldszahl im Intervall von  $3 \cdot 10^5$  bis  $5 \cdot 10^5$  liegt.

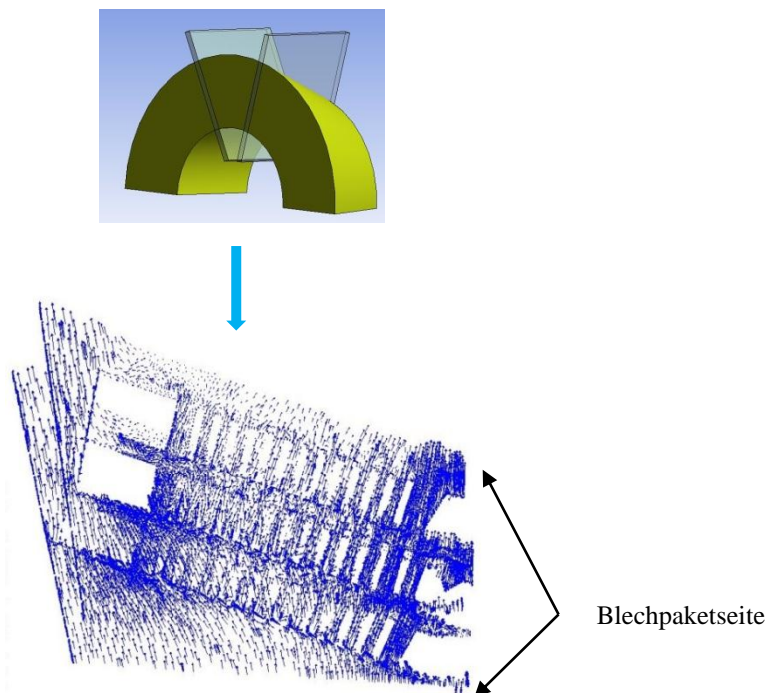
Erwartungsgemäß fließt der Volumenstrom durch den sich überlappenden Bereich der Wickelungsstäbe nach oben („Outlet“). Am oberen Ausgang ist die Verteilung des Luftdrucks weitgehend gleichmäßig.

Eine der wichtigsten charakteristischen Größen, die das Verhalten der Gasströmung beschreibt, ist die Strömungsgeschwindigkeit. Ihre Verteilung innerhalb des Wickelkopfs ist in Abbildung 7.16 dargestellt, wobei für die Simulation die vorstehend definierten Randbedingungen für die Drücke angenommen werden. Bedingt durch die nichtsymmetrische Struktur des Wickelkopfverbundes ist die Verteilung der Geschwindigkeit innerhalb des Wickelkopfs ungleichmäßig, wobei die höchsten Werte von ca. 4,5 m/s in der Nähe des Blechpakets an den Druckfingern erreicht werden.



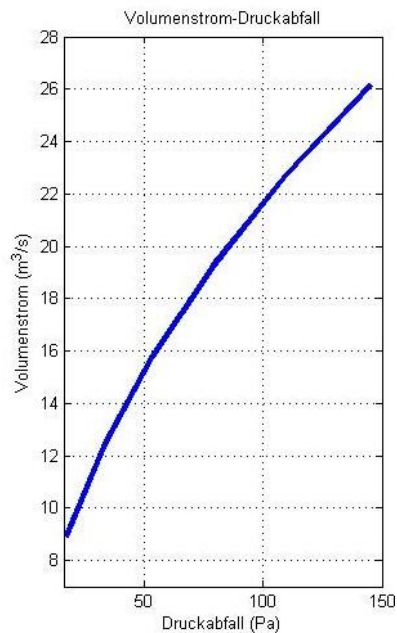
**Abbildung 7.16: Verteilung der Geschwindigkeit der Volumenströme innerhalb des Ständerwickelkopfes**

Die unsymmetrische Struktur des Ständerwickelkopfes mit einer großen Anzahl von unterschiedlichen Spalten, Ecken und Kanten bewirkt eine unregelmäßige Verteilung der Volumenströme (Abbildung 7.17).



**Abbildung 7.17: Verteilung der Volumenströme innerhalb des Ständerwickelkopfes**

Für die Eingabe in dem Netzwerkmodell wird die Widerstandskennlinie des gesamten Wickelkopfs benötigt. Um diese zu bestimmen, wird die FE-Simulation für unterschiedliche Druckdifferenzen zwischen dem Außen- und Innendruck durchgeführt, die im Bereich von 20 bis 120 Pa variiert werden. Mit den hierbei ermittelten Werten für die Volumenströme lässt sich die gesuchte Abhängigkeit (Die Druckdifferenz als Funktion des gesamten Volumenstroms (Abbildung 7.18)) aufstellen.



**Abbildung 7.18: Abhängigkeit des gesamten Volumenstroms vom Druckabfall im Ständerwickelkopf**

Hieraus lässt sich die Widerstandskennlinie direkt ermitteln.

Mit dem Volumenstrom

$$\Delta P_V = \rho \cdot \xi \cdot \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{\dot{V}}{A} \right)^2$$

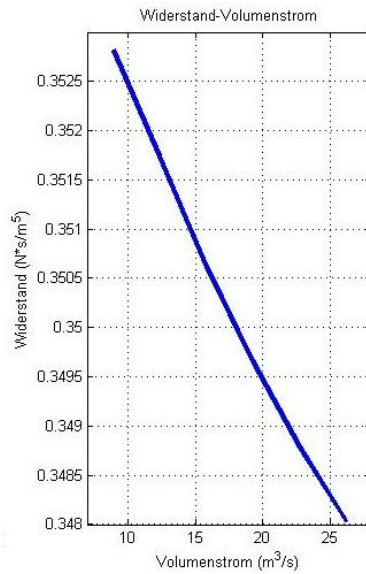
kann direkt der Widerstand bestimmt werden:

$$R = \frac{\xi_R \cdot \rho}{2A^2} \quad (7.6)$$

Es bedeuten:  $\Delta P$  : Druckabfall,  $\rho$ : Dichte,  $\dot{V}$  : Volumenstrom

Wiederholt man diese Berechnung für den gesamten untersuchten Bereich, so erhält man die gesuchte Widerstandskennlinie (Abbildung 7.19).





**Abbildung 7.19: Widerstandskennlinie für den untersuchten Ständerwickelkopf**

Die vorstehend ermittelte Kennlinie wird in das *Flowmaster*-Programm eingefügt. Bemerkenswert ist, dass der Widerstand mit steigendem Volumenstrom relativ langsam abfällt. Hieraus folgt, dass bei überschlägigen Untersuchungen der Einfluss des Volumenstroms auf den Widerstand vernachlässigt werden kann.

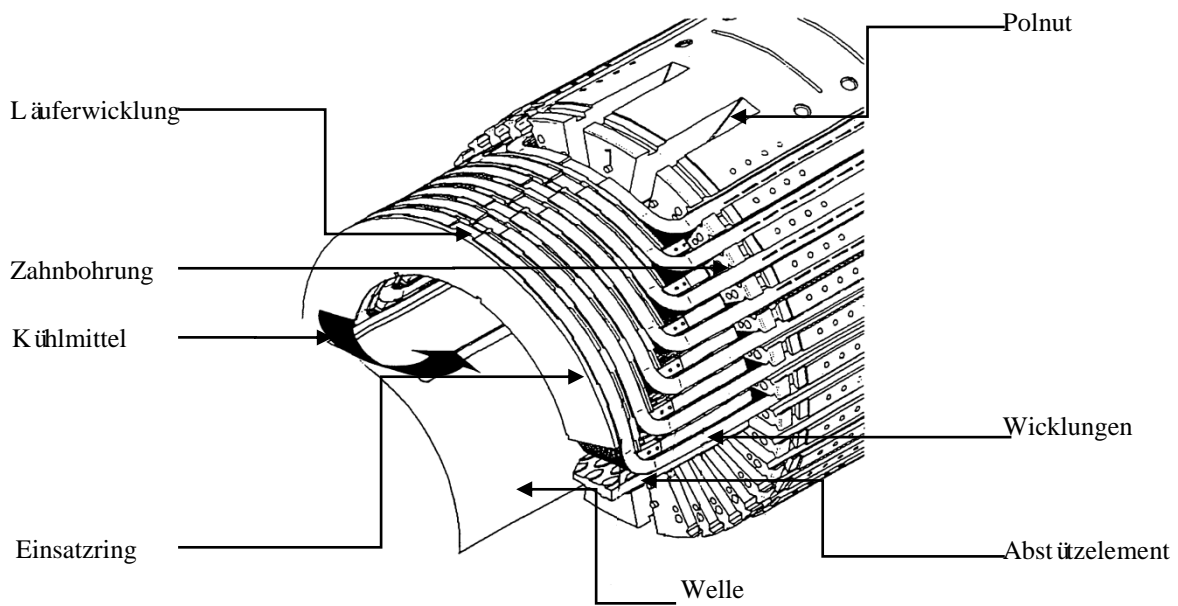
### 7.3 Rotorwickelkopf

Der geometrische Aufbau des Rotorwickelkopfes ist ebenfalls sehr komplex und dadurch auch der analytischen Betrachtung praktisch unzugänglich.

Die Zuführung des Kühlmediums erfolgt in einem Spalt zwischen der Oberfläche der Welle und der inneren Fläche einer Rotorkappe, welche den Wickelkopf in axialer Richtung abschließt. Das vom Wickelkopf erwärmte Kühlmedium tritt in die Polschlitz und in die Bohrungen in den Rotorzähnen ein und gelangt schließlich in den Luftspalt des Generators. Die treibende Kraft für die Strömung ist der radiale Druckunterschied.

Zwischen den Leitern sind flache, plattenförmige Abstützelemente aus einem Isolationsmaterial, das aus glasfaserverstärktem Kunststoff besteht, angeordnet.

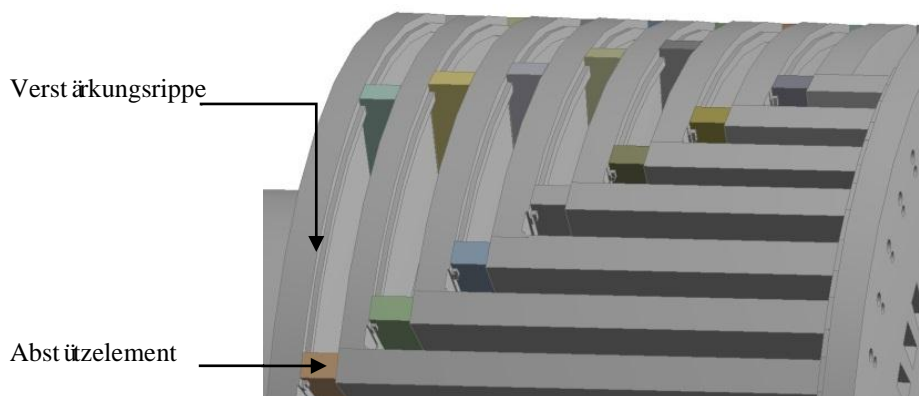
In Abbildung 7.20 ist eine grobe Darstellung des gesamten Wickelkopfes skizziert.



**Abbildung 7.20: Läuferwickelkopf ohne Läuferkappe [28]**

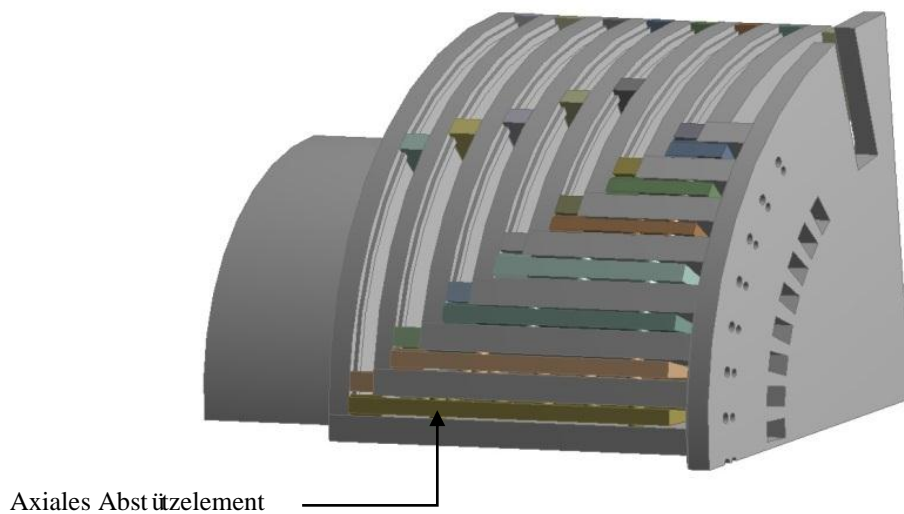
Das einströmende Kühlmittel teilt sich in unterschiedliche Kanäle auf und kühlt die Oberflächen der Wicklungen und des Läuferballens.

Abstüzelemente an unterschiedlichen Stellen regulieren die Luftströmung und gewährleisten, dass alle Oberflächen der Wicklung und des Läuferballens gleichmäßig gekühlt werden. Um die Abstüzelemente zu befestigen, werden Verstärkungsrippen eingesetzt (Abbildung 7.21).



**Abbildung 7.21: Abstüzelemente in radialer Richtung**

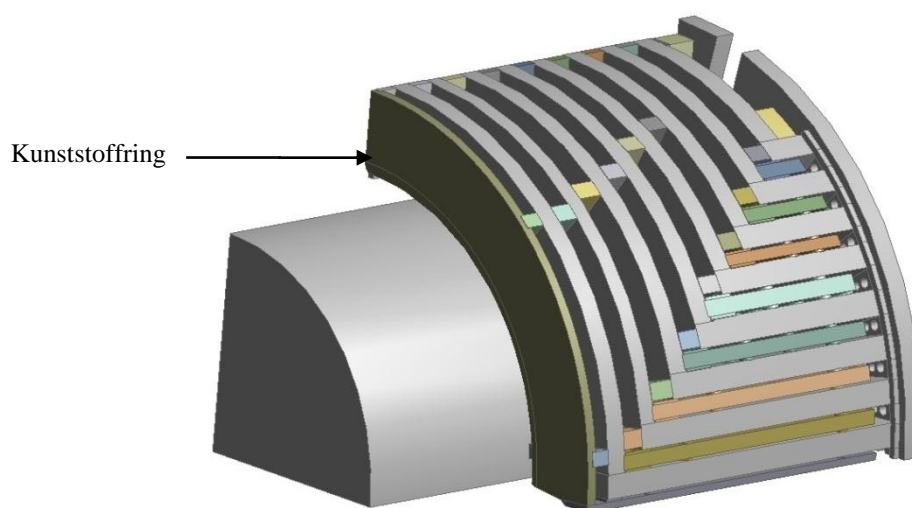
In axialer Richtung gibt es weitere Abstüzelemente mit unterschiedlicher Länge und Form. Sie führen den Luftstrom entlang vorgegebener Pfade (siehe Abbildung 7.22):



**Abbildung 7.22: Abstützelemente in axialer Richtung**

Die Pfade des Luftstroms werden durch die Form der Abstützelemente und die aus der Oberfläche herausragenden zylinderförmigen Zapfen vorgegeben

Die Abstützelemente in axialer Richtung hindern die Luft daran, direkt nach oben zu strömen, da das Element im Zwischenraum zwischen zwei nebeneinander liegenden Wicklungen steckt. Der untere stabförmige Zapfen und die oberen zylinderförmigen Zapfen regulieren gemeinsam die Richtung der Strömung. Außer den Abstützelementen in radialer und axialer Richtung gibt es noch Stützstücke an der Läuferendscheibe, um die Wicklungen zu befestigen (Abbildung 7.23). Der Zwischenraum zwischen allen Abstützelementen und Wicklungen bildet ein System mit zahlreichen Kühlkanälen.



**Abbildung 7.23: Läuferwicklung mit Distanzstücken und Isolierung**

### 7.3.1 FE-Modell des Läuferwickelkopfes

Der betrachtete Läufer besitzt eine symmetrische Struktur, daher wird nur ein Viertel des Wickelkopfbereichs analysiert. Da das Kühlmedium durch die freien Räume der Rotorwicklung strömt, muss für die FE-Simulation ein Negativabbild des Wickelkopfs (siehe Abbildung 7.24) erstellt werden.

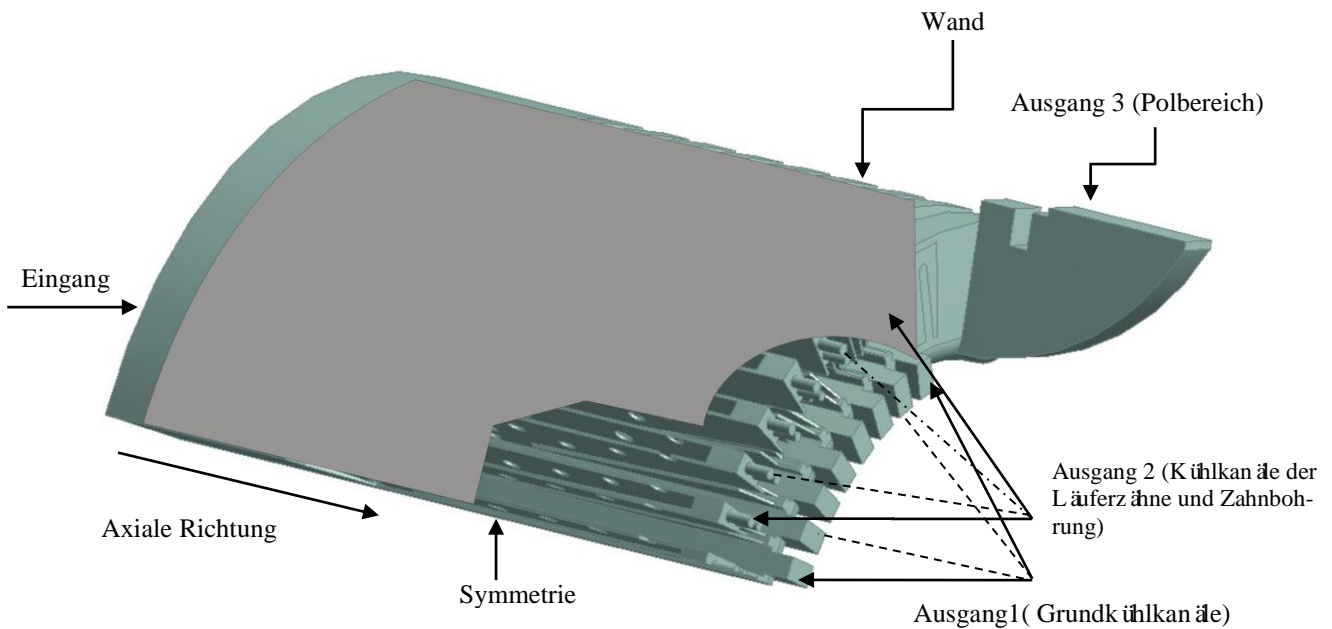


Abbildung 7.24: Invertiertes Modell

Der von dem Luftgebläse strömende Volumenstrom dringt in den Einsatzring ein. Seine Ebene wird im Modell als Eingangsfläche betrachtet. Auf der Ballenseite strömt das Gas durch die Nutgrundkühlkanäle (Ausgang 1) und durch die Bohrungen in den Rotorzähnen und dem Polbereich (Ausgang 2) aus dem Rotorwickelkopf heraus.

In Vorbereitung für die FE-Simulation muss das Negativ des CAD Modells vernetzt werden (Abbildung 7.25):

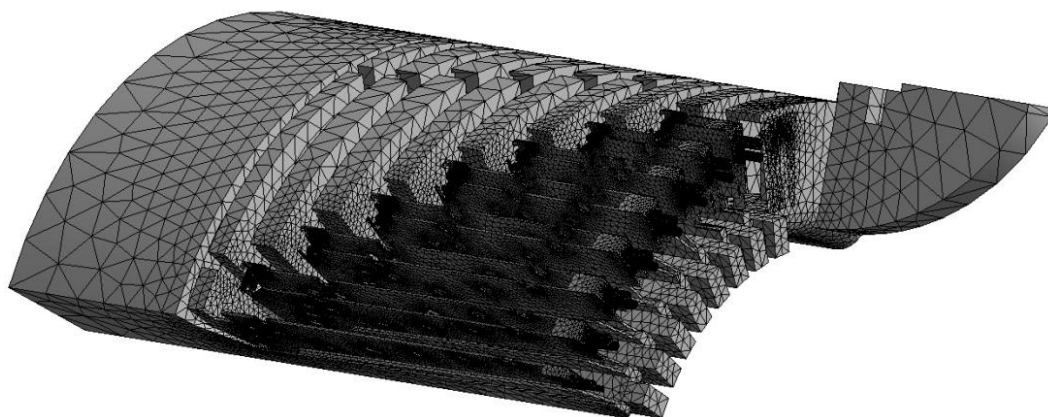


Abbildung 7.25: Wickelkopfbereich nach Vernetzung

---

In Abbildung 7.24 werden die Auswirkungen der Distanzstücke deutlich. Durch diese bilden sich Kühlkanäle in axialer Richtung aus.

Das geometrische Modell beinhaltet viele Vereinfachungen und Kompromisse bei der Vernetzung, jedoch steht hiermit eine vergleichsweise gute Grundlage für die nachfolgenden Simulationen zur Verfügung.

### **7.3.2 Widerstandskennlinie des Rotorwickelkopfes**

Das Ziel dieser Simulation ist die Bestimmung der nichtlinearen Abhängigkeit zwischen den Druckabfällen und den Volumenströmen. Hierzu werden Simulationen mit unterschiedlichen Eingangsvolumenströmen durchgeführt. Zudem werden die Verteilungen der beiden physikalischen Größen in ausgewählten Ebenen untersucht. Am Ende werden alle wichtigen Widerstandszahlen und geometrischen Daten in das Volumenstromnetzwerk als konzentrierte Elemente übernommen.

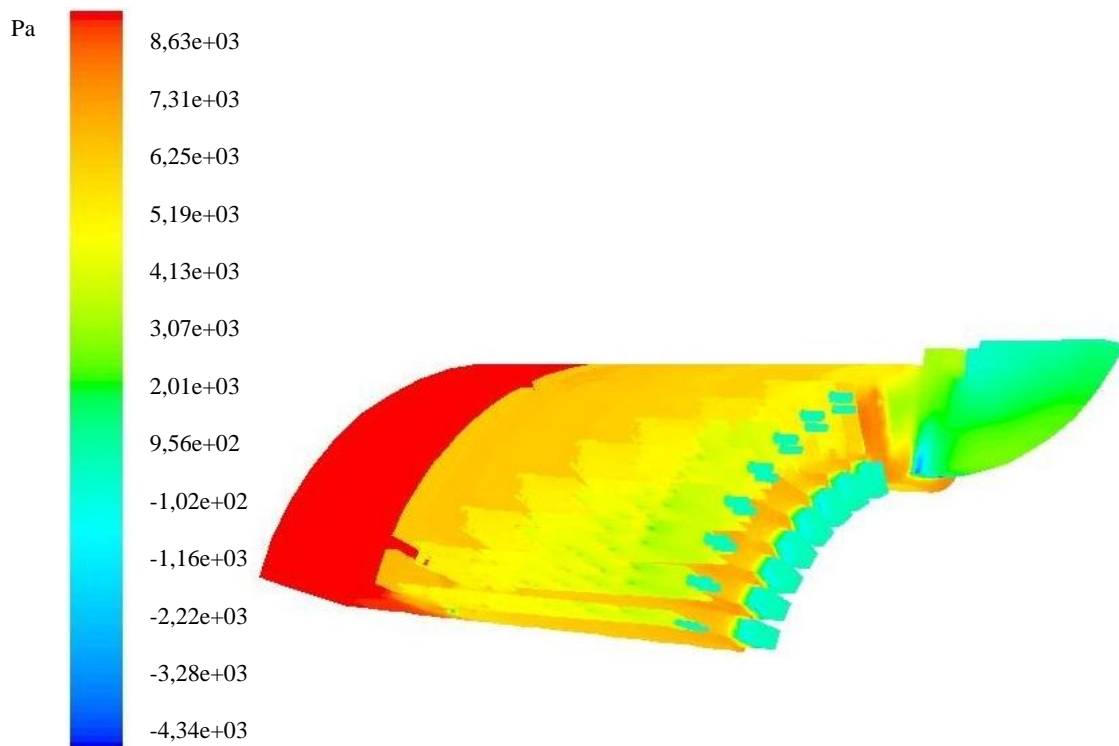
Für die Simulation werden folgende Randbedingungen festgelegt:

- Der gesamte Läufer rotiert um die eigene Achse. Im Volumenstromnetzwerk wird dies als eine zusätzliche Luftdruckquelle (Abbildung 6.4) modelliert.
- In Ansys-Fluent wird die Rotation der Maschine durch eine Randbedingung vorgegeben. Die den äußeren Wickelkopfbereich begrenzende Wand (Wall) wird als beweglich betrachtet, die Koordinaten der Rotationsachse werden in der Mitte festgelegt.
- Die Geschwindigkeit der einströmenden Luft wird aus der klassischen Netzwerkberechnung übernommen, sie ist (mit 12,86 m/s) relativ niedrig, so dass von einer laminierenden Strömung ausgegangen wird.

Die wichtigsten Ergebnisse der Simulation sind die Verteilungen

- des statischen Luftdrucks (Abbildungen 7.26 und 7.27),
- der Luftgeschwindigkeit (Abbildungen 7.28 bis 7.29) und
- der Volumenströme (Abbildung 7.30).

Um diese zu visualisieren, werden durch den Wickelkopf an interessierenden Stellen Längs- und Querschnitte gezogen.



**Abbildung 7.26: Verteilung des statischen Luftdrucks im Rotorwickelkopf**

Durch die Rotation wird ein zusätzlicher Druck erzeugt,

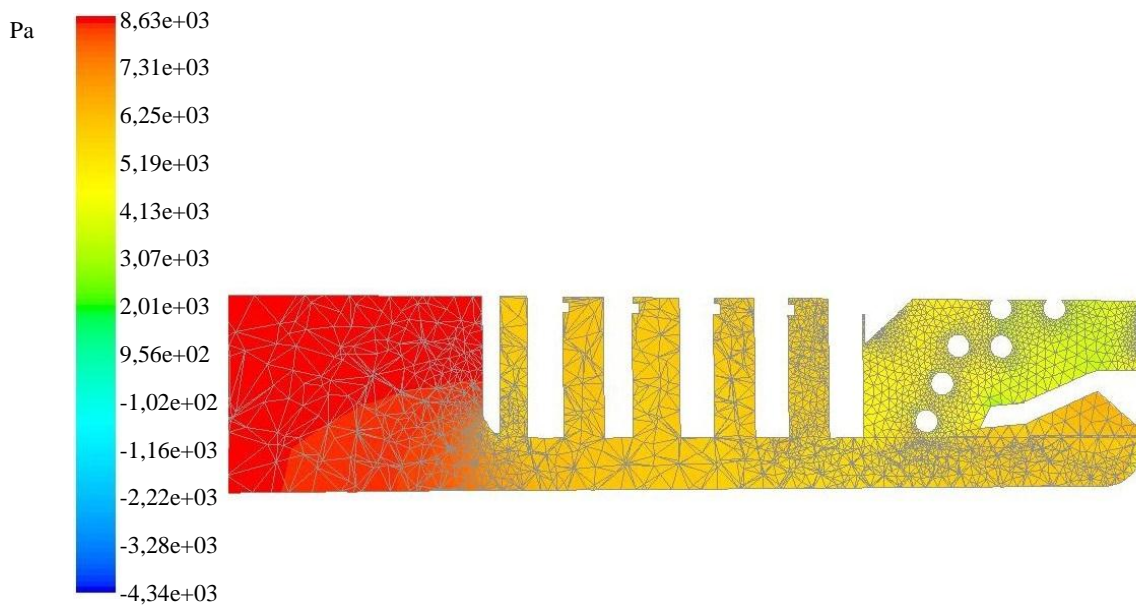
Es gilt:

$$\Delta p = \omega^2 \cdot 0,5 \cdot \rho \cdot (r_a^2 - r_i^2) \quad (7.7)$$

$\omega$ : Winkelgeschwindigkeit,  $r_a$ : äußerer Radius des Wickelkopfs,  $r_i$ : innerer Radius.

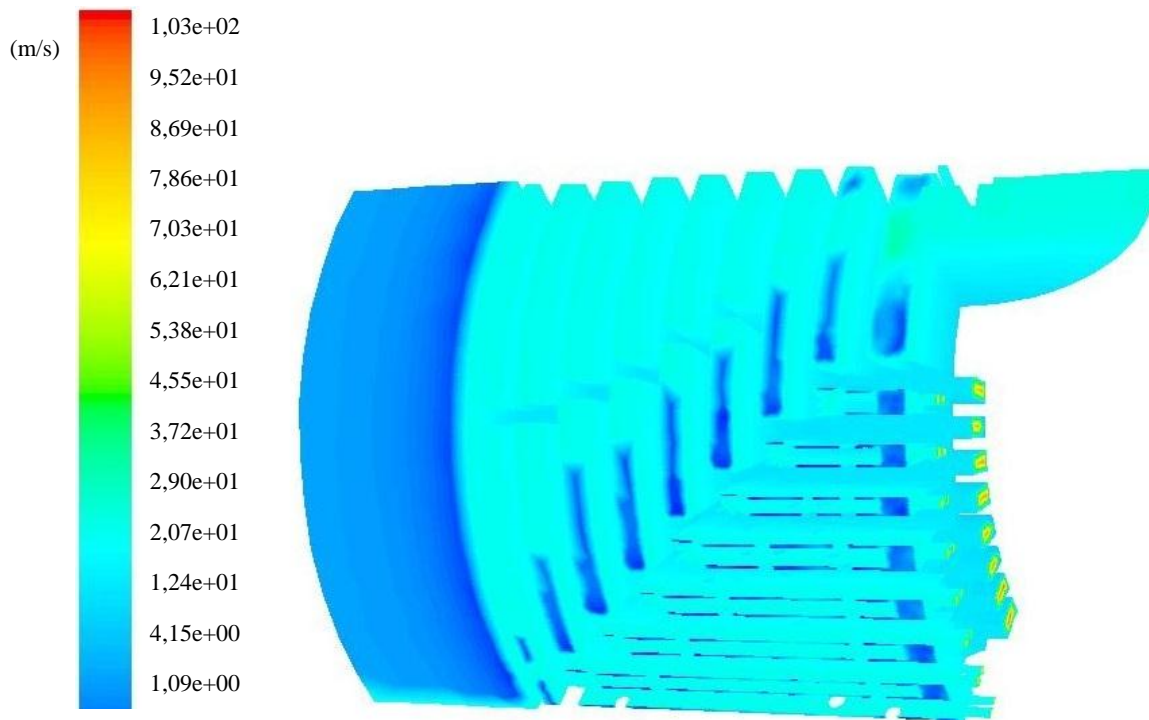
Wegen der erhöhten Druckdifferenz wird mehr Kühlgas gefördert, wodurch alle Kontaktflächen unter den Rotorkappen gut umströmt werden.

Wie in Abbildung 7.26 zu erkennen ist, nimmt der Luftdruck in axialer Richtung ab. Es lässt die Luft nach vorne strömen. Dieses Verhalten lässt sich in einem Längsschnitt (Abbildung. 7.27) verdeutlichen.



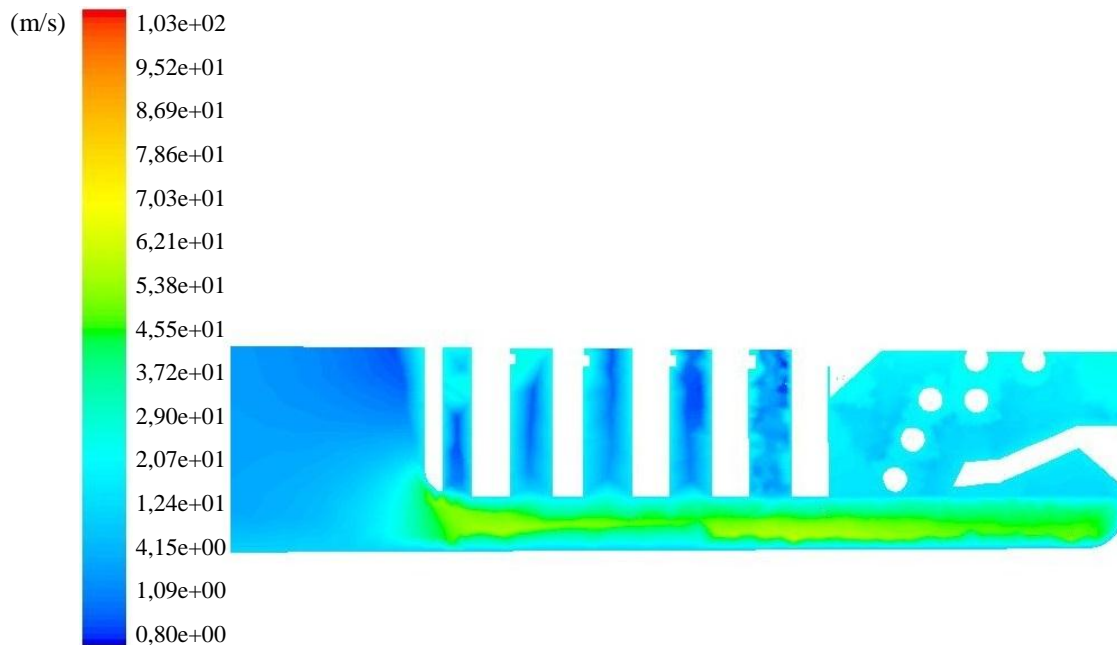
**Abbildung 7.27: Verteilung des Luftdrucks eines Längsschnitts**

Die Geschwindigkeitsverteilung in der Maschine ist in Abbildung 7.28 zu sehen:



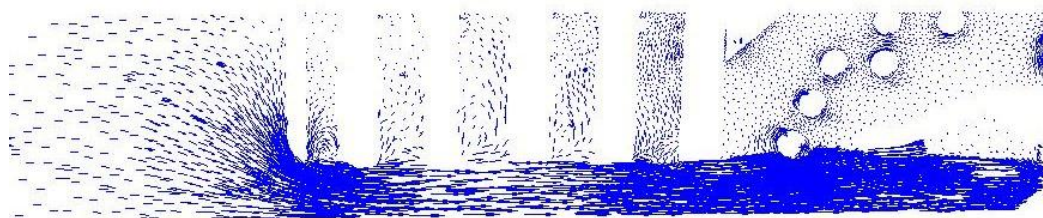
**Abbildung 7.28: Verteilung der Geschwindigkeit im Wickelkopf**

Nachdem der Luftstrom durch den Einsatzring eingedrungen ist, erhöht sich die Geschwindigkeit fast ohne Übergang und verteilt sich gleichmäßig zwischen den Kühlkanälen in tangentialer und axialer Richtung. Der konstruktive Aufbau sorgt für eine gleichmäßige Kühlung.



**Abbildung 7.29: Verteilung der Geschwindigkeit entlang eines Kühlkanales**

Abbildung 7.29 zeigt die Verteilung der Geschwindigkeit in einem Querschnitt durch den Luftkanal. Die Luftströmung weist eine hohe Geschwindigkeit von bis zu 100 m/s in axialer Richtung auf. Dieses Verhalten wird durch eine Vektordarstellung in Abbildung 7.30 hervorgerufen.



**Abbildung 7.30: Verteilung der Geschwindigkeit (Vektordarstellung)**

Die Kühlströme konzentrieren sich im unteren Teil der Kühlkanäle. Sie ermöglichen dadurch eine intensive Kühlung der Wicklungsstäbe in den Nuten des Läufers, wobei die Abstützelemente die Strömungsrichtung regulieren.



Die Auswirkung aller Abstützelemente und der des Kappenendrings auf die Verteilung der Strömung werden in Abbildung 7.30 verdeutlicht. Sie leiten die Ströme in die Bereiche zwischen den Spulen, wo durch elektrische Rotorströme hohe elektrische Verluste erzeugt werden. Durch Kantenabrundungen der Läuferendscheibe wird der Luftdruckverlust reduziert.

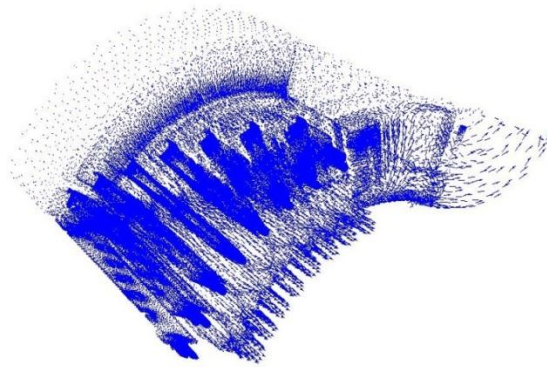


Abbildung 7.31: Verteilung der Volumenströme zwischen den Läuferwindungen

### 7.3.3 Widerstandskennlinien für den Rotorwickelkopf

Der Rotorwickelkopf gehört zu den thermisch am stärksten beanspruchten Komponenten, die häufig die Leistungserhöhung des gesamten Generators begrenzen. Um die Kühlung in diesem Bereich zu verbessern, bedarf es sehr komplexer konstruktiver Lösungen. Wie bereits in den Kapiteln 7.3.1 und 7.3.2 dargestellt, teilt sich der unter dem Einsatzring einströmende Volumenstrom in drei Teilströmungen, die durch völlig unterschiedliche Wege geführt werden und verschiedene geometrische Strukturen umströmen.

Die Aufteilung des Hauptstroms sowie die Zuordnung der Ersatzwiderstände sind in Abbildung 7.32 dargestellt. Diese Netzwerkverfeinerung wurde bereits bei der Abbildung des gesamten Netzwerkmodells berücksichtigt (siehe Abbildung 6.4).

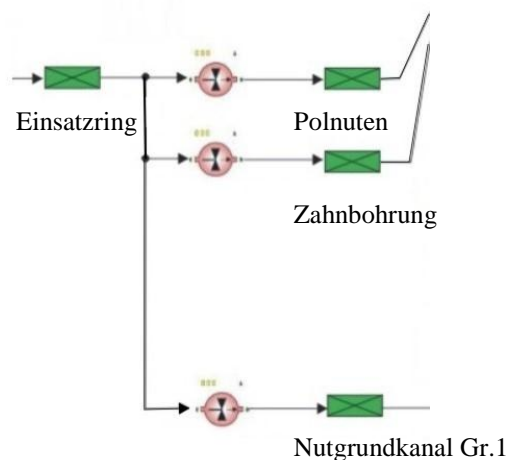


Abbildung 7.32: Aufteilung der Hauptströmung innerhalb des Rotorwickelkopfes

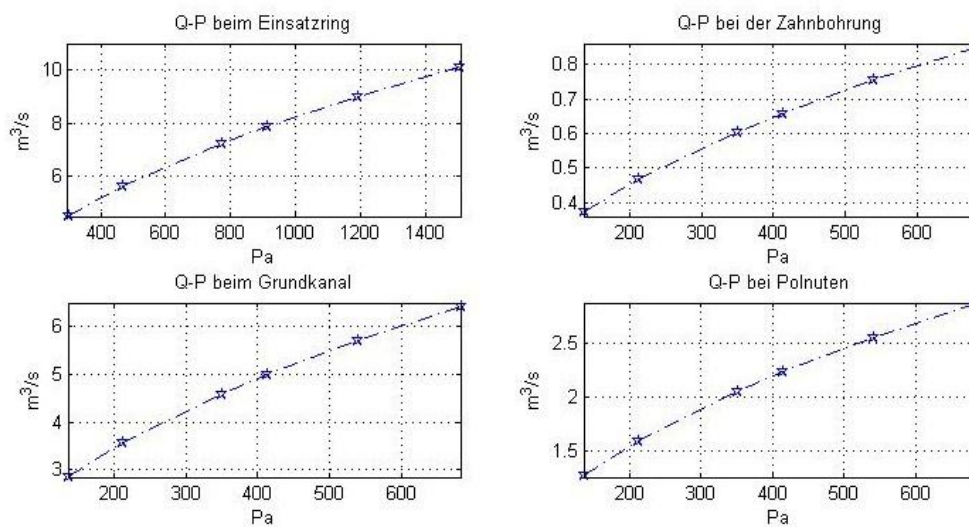
Hieraus wird deutlich, dass es nicht ausreicht, das Verhalten des Rotorwickelkopfs nur durch eine Widerstandskennlinie zu erfassen, vielmehr müssen die einzelnen Teilströme jeder für sich abgebildet und durch eigene Kennlinien beschrieben werden.

Zur Bestimmung der Widerstandskennlinie werden analog wie beim Ständerwickelkopf die FE-Simulationen bei unterschiedlichen Randbedingungen wiederholt. Hierbei werden die Druckdifferenzen zwischen dem Eingang unterhalb des Einsatzrings und den Ausgängen im Luftspalt und im Nutgrundkanal variiert.

Die Auswertung der Ergebnisse ergibt für die vier Teilwege:

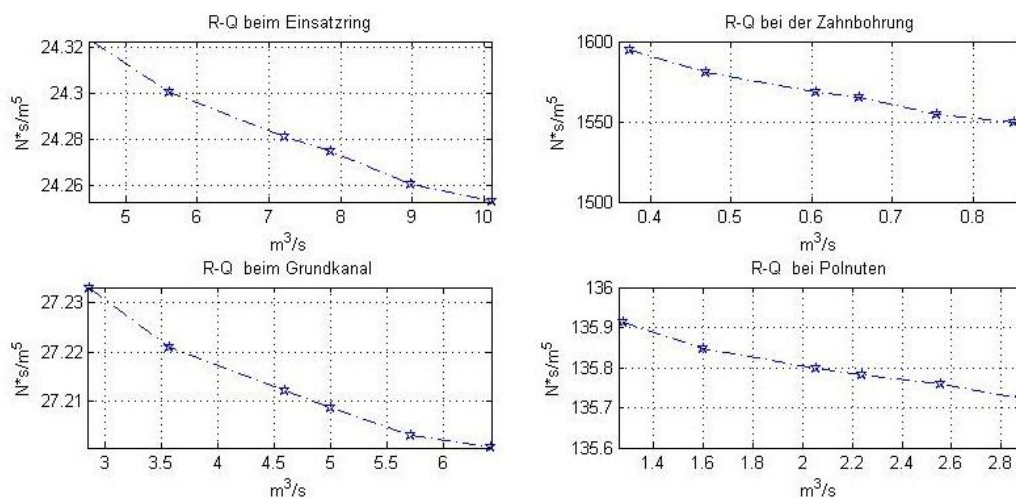
*Einsatzring, Zahnbohrungen, Polnuten und Nutgrundkanal*

die Abhängigkeiten zwischen den Volumenströmen und der Druckdifferenz (Abbildung 7.33).



**Abbildung 7.33: Kennlinien zwischen den Volumenströmen ( $Q$ ) und den Druckabfällen ( $P$ )**

Hieraus lassen sich direkt die gesuchten Widerstandskennlinien ableiten (Abbildung 7.34):



**Abbildung 7.34: Widerstandskennlinien für die Teilbereiche des Rotorwickelkopfs**

---

Aus Abbildung 7.34 ist zu erkennen, dass die Widerstandskennlinien für alle vier Wege im untersuchten Spektrum der Druckdifferenz von 0 bis 800 Pa eine geringe Nichtlinearität aufweisen. Sie können daher bei der Netzwerksimulation durch eine lineare Kennlinie approximiert werden.

---

## Kapitel 8 Einfluss der detaillierten Modellierung auf die Verteilung der Volumenströme

Nachdem im vorangegangenen Kapitel die Netzwerkstruktur verfeinert wurde und für die wichtigsten komplexen Generatorbereiche die Widerstandskennlinien ermittelt wurden, ist es nun möglich die Auswirkung dieser Modellerweiterung auf die Verteilung der Volumenströme zu untersuchen.

Hierzu werden in das Netzwerk des Generators (Abbildung 6.4) in Bereichen des Stator- und Läuferwickelkopfs die im Netzwerk enthaltenen konstanten Widerstände durch die vorstehend ermittelten Widerstandskennlinien ersetzt.

Die Berechnung der Volumenströme erfolgt ebenfalls mit dem Programm *Flowmaster*. Die Randbedingungen, insbesondere die Volumenströme und die Druckabfälle am Gebläse, werden beibehalten. Der Berechnungsablauf ist in Abbildung 8.1 aufgezeigt.

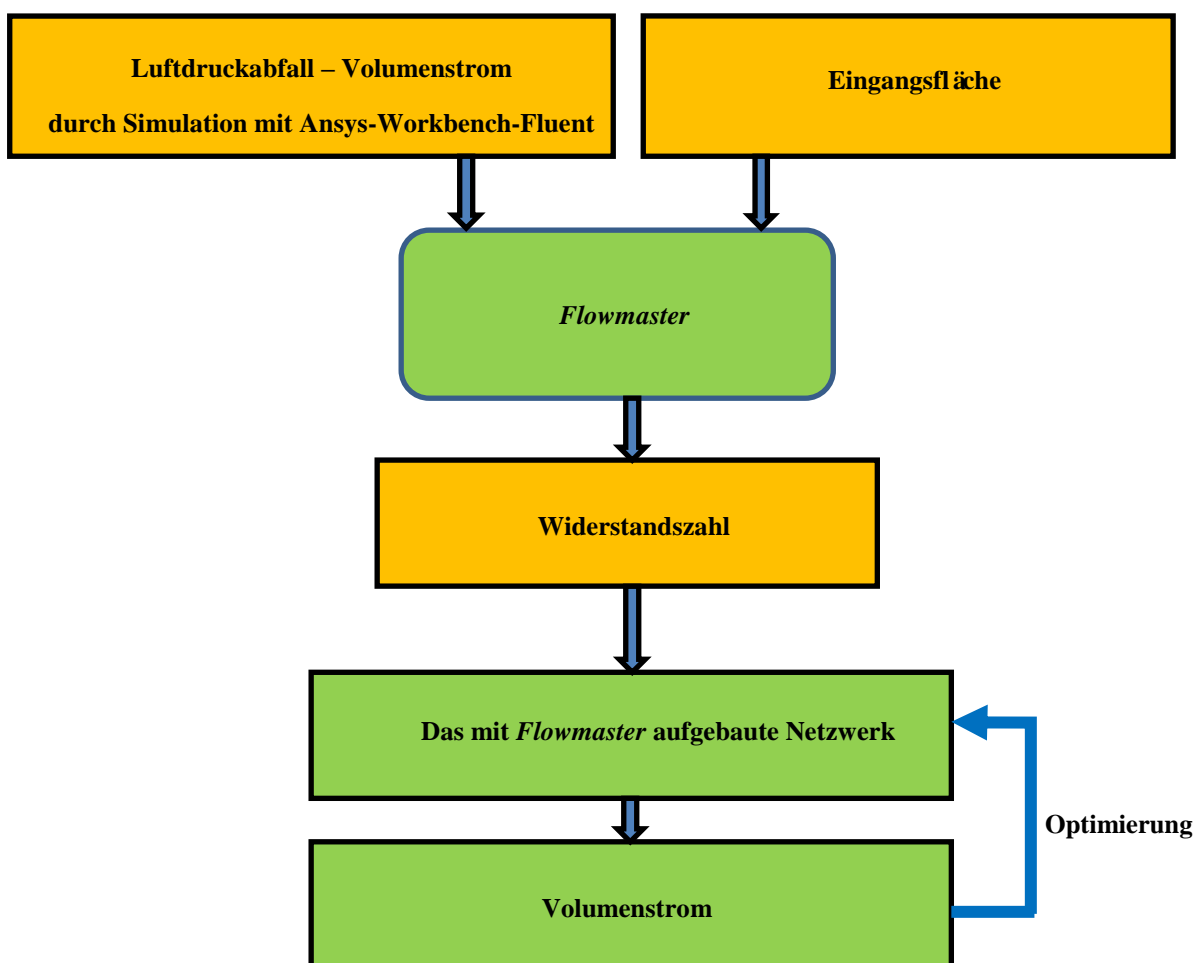


Abbildung 8.1: Flussdiagramm für die Berechnung der Volumenströme unter Berücksichtigung der nichtlinearen Widerstände

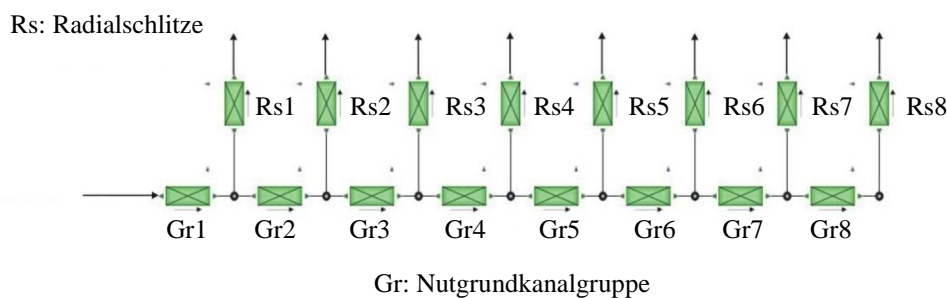
Für drei untersuchte Bereiche werden die mit *Flowmaster* (mit integrierten Kennlinien) berechneten Volumenströme mit denen verglichen, die zu Beginn der Untersuchung mit dem klassischen (also nicht erweiterten) Netzwerkmodell mit konstanten Widerständen ermittelt wurden.

Die hierbei ermittelten Volumenströme sind in den Tabellen 8.1 bis 8.3 aufgelistet. Um den Vergleich transparent zu gestalten, werden nachfolgend die Ergebnisse für die drei interessierenden Bereiche Nutgrundkanal, Ständerwickelkopf und Rotorwickelkopf getrennt diskutiert.

Bei der Interpretation der Ergebnisse ist zu beachten, dass diese mit vollständigen Netzwerken gewonnen wurden und somit den Einfluss der benachbarten Komponenten enthalten[36].

## 8.1 Nutgrundkanal

Der untersuchte Netzwerkabschnitt ist zum besseren Verständnis der Ergebnisse in Abbildung 8.2 nochmals dargestellt. Hier sind auch die Bezeichnungen der Gruppen der radialen Kanäle eingetragen.



**Abbildung 8.2: Erweitertes Netzwerk für den Bereich der Nutgrundkanäle**

Die Ergebnisse der Berechnung sind in Tabelle 8.1 zusammengefasst:

| Name und Nummer der Bauelemente im L äufer | Berechnung nach klassischer Netzwerktheorie (m <sup>3</sup> /s) | Berechnung mit <i>Flowmaster</i> und Parameteranpassung, Erweitertes Netzwerkmodell (m <sup>3</sup> /s) | Abweichung zwischen beiden Modellen(%) |
|--|---|---|--|
| Nutgrundkanal<br>Gr.1                      | 4,90  | 4,90  | 0%                                     |
| Nutgrundkanal<br>Gr.2                      | 4,06  | 4,23  | 4%                                     |
| Nutgrundkanal<br>Gr.3                      | 3,28  | 3,56  | 8%                                     |
| Nutgrundkanal<br>Gr.4                      | 2,58  | 2,89  | 12%                                    |
| Nutgrundkanal<br>Gr.5                      | 1,95  | 2,22  | 13%                                    |
| Nutgrundkanal<br>Gr.6                      | 1,39  | 1,56  | 12%                                    |
| Nutgrundkanal<br>Gr.7                      | 0,92  | 1,04  | 13%                                    |
| Nutgrundkanal<br>Gr.8                      | 0,45  | 0,52  | 15%                                    |
| Radialschlitz<br>Rs.1                      | 0,83  | 0,68  | 18%                                    |
| Radialschlitz<br>Rs.2                      | 0,77  | 0,66  | 14%                                    |
| Radialschlitz<br>Rs.3                      | 0,70  | 0,67  | 4%                                     |
| Radialschlitz<br>Rs.4                      | 0,62  | 0,67  | 8%                                     |

|                       |      |      |     |
|-----------------------|------|------|-----|
| Radialschlitz<br>Rs.5 | 0,55 | 0,66 | 20% |
| Radialschlitz<br>Rs.6 | 0,46 | 0,51 | 10% |
| Radialschlitz<br>Rs.7 | 0,47 | 0,52 | 10% |
| Radialschlitz<br>Rs.8 | 0,45 | 0,52 | 15% |

**Tabelle 8.1: Vergleich der Volumenströme, berechnet nach der klassischen Netzwerktheorie und mit dem erweiterten Netzwerkmodell**

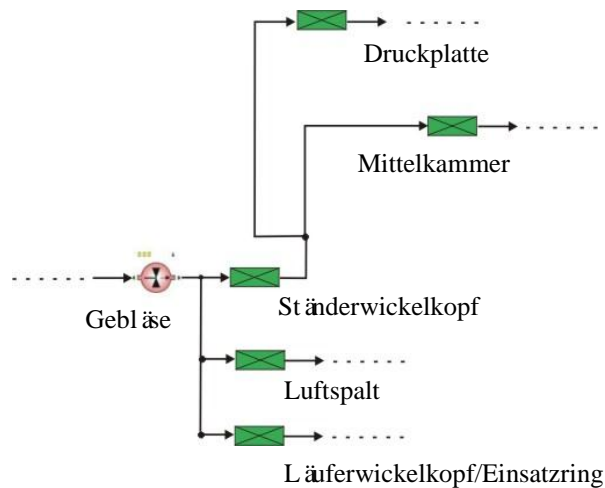
Die Analyse der Zahlenwerte zeigt, dass beide Verfahren teilweise stark voneinander abweichende Volumenströme in einzelnen Gruppen liefern, z. B. für die Gruppe 8 beträgt die Abweichung 15 % und für die in Rs. 5 zusammengefassten Radialschlitze sogar 20 %.

Weiterhin ist erkennbar, dass mit Hilfe des kombinierten Verfahrens *FE/Flowmaster* eine deutlich gleichmäßigere Verteilung der Volumenströme in den radialen Kühlkanälen errechnet wird als mit der konventionellen Netzwerktheorie.

Eine weitere wichtige Erkenntnis dieser Simulation ist, dass durch die Verengung des Nutgrundkanals entlang des Rotorballens eine gleichmäßige Volumenstromverteilung durch die Kühlschlitze erreicht werden konnte. Somit kann davon ausgegangen werden, dass auch die Temperatur des Ballens über die axiale Länge konstant ist. Somit hat die vom Hersteller ausgeführte neue konstruktive Lösung das angestrebte Ziel erfüllt

## 8.2 Ständerwickelkopf

Der komplexe Endzonenbereich des Generators wird im Netzwerk durch Parallelschaltung von Widerständen des Einsatzringes, des Luftspaltes sowie des Wickelkopfes abgebildet. Anders als bei den Nutgrundkanälen wird der gesamte Wickelkopf nur mit einem resultierenden Widerstand erfasst.



**Abbildung 8.3: Netzwerk im Bereich der Endzone**

Die folgende Tabelle 8.2 zeigt den Vergleich zwischen den Volumenströmen im Bereich der Generatorendzone:

| Bauelement in der Endzone     | Berechnung nach klassischer Netzwerktheorie(m <sup>3</sup> /s) | Berechnung mit <i>Flow-master</i> und Parameteranpassung/Erweitertes Netzwerkmodell(m <sup>3</sup> /s) | Abweichung zwischen beiden Modellen(%) |
|-------------------------------|--|--|--|
| Gebläse                       | 29,00  | 28,96  | 0,1%                                   |
| Mittelkammer                  | 6,02   | 5,73   | 4%                                     |
| Druckplatte                   | 2,9  | 3,1  | 6%                                     |
| Ständerwickelkopf             | 8,92   | 10,31  | 15%                                    |
| Luftspalteintritt             | 12,86  | 11,44  | 11%                                    |
| Läuferwickelkopf /Einsatzring | 7,20   | 7,20   | 0%                                     |

**Tabelle 8.2: Vergleich der Volumenströme in der Endzone**

Die Berücksichtigung der Widerstandskennlinie des Ständerwickelkopfes führt rechnerisch zu einer markanten Erhöhung des Volumenstroms in diesem Bereich um 15 %. Hieraus folgt, dass im Vergleich zur jetzigen Auslegung in diesem Bereich eine „Kühlgasreserve“ vorhanden ist. Allerdings gibt dieser Wert nur eine gesamte durchschnittliche Erhöhung an. Eine genaue Betrachtung des Strömungsverlaufs in Kapitel 6.2.2 zeigt, dass im Bereich des Wi-



---

Wickelpfades der Luftdruck ungleichmäßig aufgebaut wird, was eine ebenfalls ungleichmäßige Verteilung der Volumenströme in radialer und axialer Richtungen hervorruft. Bevor jedoch diese Kühlgasreserve bei der zukünftigen Maschinenauslegung ausgenutzt wird, müssen mit Hilfe der FE-Simulation die lokalen Kühlgasströmungen genau analysiert werden.

### 8.3 Läuferwickelkopf

Im Bereich des Läuferwickelkopfs teilt sich der unter dem Einsatzring eintretende Volumenstrom in drei Teilvolumenströme, die die Polnuten, die Zahnbohrungen und die Nutgrundkanäle versorgen (Abbildung 8.4).

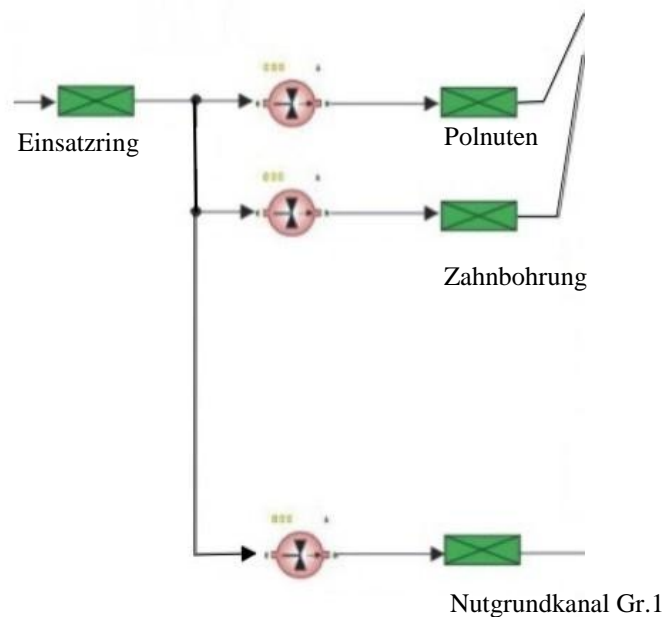


Abbildung 8.4: Volumenströme im Bereich des Läuferwickelkopfes

Die Gegenüberstellung der Volumenströme in den einzelnen Bereichen des Läuferwickelkopfes ist in Tabelle 8.3 dargestellt. Auch hierbei wird der gesamte Bereich des Wickelkopfes durch nur einen Ersatzwiderstand zusammengefasst.

| Name und Nummer der Bauelemente im Läufer | Berechnung nach klassischer Netzwerktheorie(m <sup>3</sup> /s) | Berechnung mit <i>Flowmaster</i> und Parameteranpassung, Erweitertes Netzwerkmodell (m <sup>3</sup> /s) | Abweichung zwischen beiden Modellen (%) |
|---|--|---|---|
| Wickelkopf-Läufer                         | 7,21   | 7,29  | 1%                                      |
| Polnuten (Eintritt)                       | 1,46   | 1,74  | 19%                                     |
| Zahnbohrung (Eintritt)                    | 0,84   | 0,67  | 20%                                     |
| Nutgrundkanal (Eintritt)                  | 4,90   | 4,88  | 0,4%                                    |

**Tabelle 8.3: Vergleich der Volumenströme im Bereich des Läuferwickelkopfes**

Beide Verfahren liefern im Bereich des Wickelkopfs fast die gleichen Werte für den gesamten Volumenstrom. Diese gute Übereinstimmung ist auf eine Vielzahl von Messungen an realen Maschinen und an speziellen Versuchsständen zurückzuführen. Diese sind notwendig geworden, nachdem in der Vergangenheit gerade in diesem Bereich bei hochausgenutzten luftgekühlten Maschinen Isolationsschäden aufgetreten waren.

Größere Differenzen bis zu 20 % treten im Bereich der Polnuten und in die Zahnbohrungen auf. Hier ist zwar der Summenstrom für die beiden Bereiche fast gleich groß, jedoch seine Aufteilung stark unterschiedlich.

---

## Kapitel 9 Abschließende Bewertung

Während der Untersuchung wurde stets deutlich, dass der am Anfang der Arbeit erhobene Anspruch, die Volumenströme und Druckverteilung in einem realen Generator zu bestimmen, an vielen Stellen nicht voll erfüllt werden konnte.

Der komplexe Aufbau des Generators, sowie die sehr komplizierte konstruktive Detailausführung der einzelnen Komponenten sind dem analytischen Verfahren unzugänglich und müssen durch vereinfachte Ersatzmodelle abgebildet werden.

Die hierfür geltenden Strömungsgesetzmäßigkeiten werden daher entweder durch Näherungsformen erfasst oder aber über gemessene Kennlinien in einer verallgemeinerten Darstellung angegeben. Die messtechnische Bestimmung solcher Kennlinien an einer realen Maschine ist zeitaufwendig und kostenintensiv. Hinzu kommt, dass die besonders interessierenden Bereiche praktisch für die Messung nicht zugänglich sind.

Der in dieser Arbeit eingeschlagene Weg, das klassische Netzwerkverfahren mit dem FE-Verfahren zu kombinieren, hat sich als geeignet erwiesen. Die leistungsbegrenzenden Bereiche der Maschine Nutgrundkanal, Stator- und Rotorwickelkopf konnten mit detaillierten FE-Modellen untersucht und in ein verfeinertes Netzwerk des Generators in Form von Kennlinien integriert werden.

Von besonderer Bedeutung für das Gelingen der Arbeit war die Bereitstellung von Daten sowie umfangreicher Messergebnisse für den Beispielgenerator von der Energieunternehmen. Sie erlaubten die Verifikation der durchgeführten Simulationen und waren stets hilfreich für die Verbesserung der Modelle.

Ebenfalls als sehr hilfreiche Lösung hat sich der Übergang von selbstentwickelten Programmen, die auf der klassischen Netzwerkanalyse aufbauen, zu dem kommerziellen Programm *Flowmaster* ergeben. Hierbei konnten die Vorteile des Programms, wie z. B. die formalisierte Netzwerkbildung, die hinterlegten Standardkomponenten sowie die schnellen Lösungsverfahren, direkt genutzt werden. Ein sehr wichtiges Merkmal war die Möglichkeit, die mit FE-Verfahren ermittelten Kennlinien direkt zu integrieren.

Durch den Einsatz des kombinierten Verfahrens konnten die Volumenströme und die Druckabfälle in den kritischen Bereichen deutlich genauer als bisher bestimmt werden, so wurden z. B. im Bereich der Ständerwickelköpfe Unterschiede zu den Ergebnissen der klassischen Berechnung von bis zu 20 % festgestellt. Angesichts dessen, dass die Leistung der Maschine in einem hohen Maße von der Kühlung abhängig ist, zeigen die in dieser Arbeit erforschten Simulationsverfahren für die zukünftige Auslegung der Maschinen ein erkennbares Verbesserungspotential.

## Kapitel 10 Ausblick

Das in dieser Arbeit vorgestellte Verfahren zur kombinierten Netzwerk/FE-Analyse der Verteilung der Volumenstromverteilung stellt im Turbogenerator eine deutliche Verbesserung der bisher in der Industrie angewandten Praxis bei der Auslegung von elektrischen Maschinen großer Leistung dar. Der weitgehend lineare Verlauf der Widerstandskennlinien ermöglicht es, die erhaltenen Ergebnisse auch auf Generatoren anderer Leistung und Bauart zu übertragen. Ebenfalls besteht die Möglichkeit, das Verfahren um weitere thermisch hochbeanspruchte Komponenten zu erweitern. Erwähnt seien an dieser Stelle z. B. die Kühlschlitze des Blechpakets oder die Abtreppung der Endzähne.

Als nächster wesentlicher Schritt auf dem Wege zu einer verbesserten Auslegung der Maschine muss die Berechnung der Wärmeflüsse und der transienten Temperaturverteilung folgen. Hierbei muss ein thermisches Netzwerk analysiert werden, in dem als Eingangsgrößen die durch die Verluste verursachten Wärmequellen sowie die Wärmesenken (Wärmeabfuhr) integriert werden. Eine solche Aufgabe ist ebenfalls sehr komplex und stellt eine weitere Herausforderung an die Ingenieure dar.

Das in dieser Arbeit erforschte Verfahren zur Bestimmung der Volumenströme liefert die hierfür notwendigen Eingangsgrößen.

Eine vollständige strömungstechnische dreidimensionale FE-Analyse des gesamten Generators ist zurzeit praktisch nicht realisierbar. Hierbei müssten die „sensiblen“ Bereiche sehr detailliert vernetzt werden, was schließlich zu riesigen Modellen führen würde, die bei der praktischen Auslegung von den Entwicklungsingenieuren nicht mit sinnvollem Aufwand bewältigt werden können. Hinzu kommt, dass bei korrekter Betrachtungsweise auch der Thermosiphoneffekt berücksichtigt werden müsste, der durch die Rotordrehung erzeugt wird. Die Analyse der existierenden Arbeiten zu diesem Thema zeigt, dass einige Autoren zwar die ganze Maschine untersucht haben, allerdings die wesentlichen kritischen Bereiche entweder ganz grob oder gar nicht mitmodelliert haben [37].

# Literaturverzeichnis

[1] C. Ginet, R.Joho, M.Verrier, Member, IEEE „The Turbo generator – A Continuous Engineering Challenge”.

[2] R. Joho, C. Ginet, A. Schleussinger, „Elektrische Maschinen, insbesondere Generatoren: Supraleiter - Technologie im Wettbewerb mit verbesserter konventioneller Technologie“, Eidgenössisches Departement für Umwelt, Verkehr, Energie und Kommunikation UVEK , ALSTOM (Schweiz) AG.

[3] S. Kulig, „Elektrische Antriebe und Mechatronik“, Lehrstuhl für Elektrische Antriebe und Mechatronik, Technische Universität Dortmund.

[4] J. Eisler, „Alterungsvorgänge in der Stabisolierung von Turbogeneratoren und deren Nachweis durch Messungen“, Lehrstuhl für Hochspannungstechnik und elektrische Apparate Technische Universität Budapest 19. Mai. 1964.

[5] S. Kulig, „Ausgleichsvorgänge in elektrischen Antrieben“, Lehrstuhl für Elektrische Antriebe und Mechatronik, Technische Universität Dortmund.

[6] D.Lambrecht, L.Intichar, „ The Development of Superconducting Generator“, SIEMENS KWU, International Joint Power generation Conference 21.10.1990 – 25.10.1990 in Boston (USA).

[7] C. Kreischer, „Monitoring und Diagnose von Wickelkopfschwingungen in Kraftwerksgeneratoren“, Dr. Hut Verlag, München, 2011.

[8] O. Drubel, „Die Berechnung der elektromagnetischen und thermischen Beanspruchung von Turbogeneratoren während elektrischer Störfälle mittels Finiter-Differenzen-Zeitschritt-Methode“, Lehrstuhl für Elektrische Maschinen Antriebe und Leistungselektronik, Dissertation TU Dortmund, 08. März 2000.

[9] K. Sedlazeck, „Berechnung der Temperaturverteilung in wassergekühlten Ständerstäben von Turbogeneratoren mit Hilfe von Wärmequellennetzwerken“, *Electrical Engineering* Volumen 79, Springer-Verlag, 1996.

[10] Y. Satake, N. Kohl, U. Schlager, „Critical temperature and cooling issues not usually being observable by embedded detectors“, Hitachi Power Europe GmbH, Duisburg, 15.Februar 2011.

[11] G. Klemper (Canada), Isidor Kevszenbaum (USA), „Operation and Maintenance of Large Turbo-Generators“, The Institute of Electrical and Electronics Engineers. Inc. New York, A John WILEY & Sons, Inc, publication, ISBN 0-471-61447-5, 2014.

[12] „Turbogeneratoren“, Kraftwerk Union, Siemens AG, 1984.

---

[13] M. Rioual, Senior Member IEEE „ A thermo hydraulic modeling for the stator bars of large turbo generators: Development”, validation by laboratory and on site tests. IEEE Transactions on Energy Conversion, Vol.12, No.1, März 1997.

[14] H. Li, J.Li, “Determination on Stator Standard Temperature in Condition Monitoring of Turbo Generators”, School of Electrical Engineering, North China Electric Power University, Baoding, Hebei Province, China, Chinese Society for Electric Engineer.Vol.27 No.9 Mai. 2007

[15] K. Yamazaki, S. Tada etc, “Eddy Current Analysis Considering Lamination For Stator Core Ends of Turbine generators”, Chiba Institute of Technology, Chiba Japan, IEEE Transaction on magnetics, Vol. 44, No.6, Juni 2008.

[16] F. Fischer, „Thermische Fehlerdiagnose der Wassergekühlten Statorwicklung von Grenzleistungs-Turbogeneratoren“, Dissertation, Fachbereich Elektrotechnik und Informatik der Bergischen Universität-Gesamthochschule Wuppertal, Dez. 1999.

[17] M.Lordache ,N.Voicu, „A Methode for Thermal Field Determination in Turbo-Generator Rotors with Direct Cooling” in Proccedings Part 2 of International Conference on the Evolution and Modern Aspects of Synchronous Machines Zurich, Switzerland , 27-29 August 1991.

[18] M. Iordache, N. Volcu, L. Dumitriu, C. Petrescu, „Steady – State Thermal Field Analysis from the Turbo-Generator Rotor with Direct Cooling”, University of Bucharest, Electrical Engineering Department. Romania, Advances in Electrical and Computer Engineering, Volume 7(14), Number 2(28), 2007.

[19] M.S. Rajagopal R&D, Kirloskar, „Finite Element Analysis of Radial Cooled rotating Electrical Machines”, Electric Co Ltd, Bangalore, India, K.N.Seetharamu, Mechanical Engineering Department, IIT, Madras, India, P.A. Aswatha Narayana, Applied Mechanics Department, IIT, Madras, India, International Journal of numerical for Heat & Fluid Flow. Vol. 9 No.1.1999

[20] W. Tong, „Numerical Analysis of Flow Field in Generator End – Winding Region”, Department of Mechanical Engineering, Virginia Polytechnic Institute and state University, Blacksburg, VA24060, USA, International Journal of Rotating Machinery Volume 2008, Article ID 692748.

[21] T. Tanake, K. Hattori, M. Watanabe, „ Direct Measurement of Strand Temperature on Turbo-generator with Non-Electrical Sensors”, Haus der Technik, Turbogeneratoren in Kraftwerken, Essen, 20 Feb. 2013.

[22] W. Polifke, J. Kopitz, „Wärmeübertragung – Grundlagen der analytischen und numerischen Methoden“, München, Pearson Studium, ISBN 978-3-8273-7349-6, 2009.

---

[23] J. Burkard, „Finite Elements for the Navier-Stokes-Equations”, Numerical Analysis Seminar, Department of Scientific Computing, Florida State U.S.A. University, 08 December 2011,

[24] H. Sigloch, „Technische Fluidmechanik (sechste Auflage)“, Springer Berlin Heidelberg New York, ISBN-978-3-540-44633-0, 2007.

[25] D. S. Miller, „Internal Flow System”, 2<sup>nd</sup> ed, The Fluid Engineering Centre, Cranfield, Bedford MK43 OAJ, UK, BHRA, ISBN 0-947711-77-5, 1990.

[26] J.M. Burgerscentrum, „Finite Element Methods for the incompressible Navier-Stokes Equations”, Faculty of Electrical Engineering, Mathematics and Computer Science, Delft University of Technology, Kingdom of Netherland, 2012.

[27] W. Jiajian, „Solution to Incompressible Navier Stokes Equation by Using Finite Element Method”, Master of Science in Aerospace Engineering, the University of Texas at Arlington, August 2010.

[28] Siemens AG, Energy Sector, Generatorenwerk Erfurt.

[29] S. Kulig, „Theoretische Elektrotechnik“, Lehrstuhl für Elektrische Antriebe und Mechatronik, Technische Universität Dortmund.

[30] M. Kurrat, „Numerische Berechnungsverfahren“, Vorlesungsskript Wintersemester 2007/2008, Institut für Hochspannungstechnik und Elektrische Energieanlagen, Technische Universität Carolo-Wilhelmina zu Braunschweig.

[31] A.M.G. Lopes, „Implementation of the Hard-Cross Method for the Solution of Piping Networks”, ADAI- Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade de Coimbra, 3030 Portugal, December 2003.

[32] V. L. Streeter, E. B. Wylie, K. W. Bedford, „Fluid Mechanics”, (9th. Edition), University of Michigan, 1998. – ISBN 0-07-062537-9.

[33] „Flowmaster Version 7 Basis Training”, Flowmaster GmbH.

[34] Z. Chen, „Fluid Simulation Methods applied to Air-cooled Generators”, Siemens AG, Energy Sector, Generatorenwerk Erfurt, Energy Sector, Fossil Power Generation 2011.

[35] „Introduction to Using ANSYS FLUENT in ANSYS Workbench”, Release 12.1 Ansys, Inc, September 10, 2009.

[36] L. Diestel – Feddersen „Immer schön kühl bleiben“, Development Engineer Ventilation & Cooling, Alstom (Switzerland) Ltd. 5242 CH- Birr.

[37] E. Pannen „Thermosiphonkühlung der Läuferwickelköpfe von Turbogeneratoren“, Blaue TR-Reihe 1968.

---

# Lebenslauf

## Personalien

Name Kaining Zhao  
Geburtsdatum 14. Mai 1968  
Geburtsort Beijing, V.R China  
Familienstand verheiratet

## Studium

09.1988 - 09.1992  
Studium der Elektrotechnik  
*an der College of Information Technology, Beijing  
Union University*  
Abschluss: Bachelor  
09.1998 - 09.2007  
Studium der Elektrotechnik  
am Universität Dortmund (heutige TU  
Dortmund)  
Abschluss: Dipl.- Ing.

## Berufstätigkeit

11.2008-11.2013  
Wissenschaftlicher Angestellter am Lehrstuhl für  
Elektrische Antriebe und Mechatronik der Technischen  
Universität Dortmund