Svenja GRUNDEY, Pestalozzigymnasium München;

Christine KNIPPING, Universität Bremen

„Condition of transparency“ - ein theoretisches Modell zur Einsicht in eigenständige Beweisprozesse von Lernenden

Begründen und Beweisen kommt in der Mathematik und in den heutigen Bildungsplänen eine zentrale Rolle zu. Trotz dieser Bedeutung zeigen viele mathematikdidaktische Studien, dass Lernende große Schwierigkeiten mit dem mathematischen Argumentieren und Beweisen haben (z.B. Healy & Hoyles 1998; Weber, 2001). In diesem Beitrag wird ein theoretisches Modell vorgestellt, welches Einsichten in eigenständige Beweisprozesse von Lernenden ermöglicht. Anhand eines ausgewählten Fallbeispiels eines Designexperiments zum eigenständigen Beweisen in Jahrgang 10 wird dieses theoretische Modell veranschaulicht.

„Condition of transparency“ (Problematik der Sichtbarkeit)

Hemmi (2006) hat im Kontext von Hochschulmathematik einen theoretischen Ansatz entwickelt, auch als „condition of transparency“ bezeichnet, um Probleme beim Lehren und Lernen mathematischer Beweise zu erklären. Ihr Ansatz geht auf Lave und Wenger (1991) und Wenger (1998) zurück, die betonen, dass nur durch das Wechselspiel zwischen der Verwendung von Artefakten und einem Verständnis über ihre Bedeutung das Artefakt selbst erfasst und verstanden werden kann. Hemmi hat diesen Gedanken auf das Lernen von mathematischen Beweisen übertragen. Grundlegend ist dabei die Annahme, dass beim Lehren und Lernen mathematischer Beweise ein ständiges Wechselspiel zwischen Sichtbarkeit und Unsichtbarkeit stattfindet. Unter Sichtbarkeit von Beweisen versteht Hemmi (2008), dass der Fokus im Lernprozess explizit auf die Bedeutung mathematischer Beweise, etwa ihre logische Struktur oder Funktion gerichtet wird. Damit wird die Aufmerksamkeit auf die Beweisebene gelenkt („Sichtbarkeit der Beweisebene“), während die Inhalte in den Hintergrund rücken. Gleichzeitig werden durch Beweise mathematische Inhalte (Theoreme, Sätze) einsichtig und so mögliche Zusammenhänge zwischen diesen vermittelt. Die Beweisebene rückt in den Hintergrund und es findet eine Fokussierung auf die Inhaltsebene statt („Unsichtbarkeit der Beweisebene“). Das Wechselspiel von Sichtbarkeit und Unsichtbarkeit ist für Hemmi nicht nur charakteristisch für mathematische Beweisprozesse sondern auch notwendigerweise in den Produkten, den mathematischen Beweisen, angelegt. Die Schwierigkeit für Lernende besteht ihrer Auffassung nach darin, dass ihnen dieses Wechselspiel häufig verborgen bleibt („Problematik der Sichtbarkeit“).

Insbesondere können während eigenständiger Beweisprozesse Brüche und Probleme bei diesen (notwendigen) Wechseln zwischen beiden Ebenen auftreten. Dies kann sowohl zu Schwierigkeiten bei der Entwicklung eines differenzierten Beweisverständnisses als auch zu Hürden bei der Produktion eigenständiger Beweise führen. Um diesen Herausforderungen zu begegnen, ist Hemmis Modell sowohl in der Konzeption des Designexperiments (siehe auch Grundey, Knipping 2014) als auch bei der Auswertung der eigenständigen Beweisprozesse der Lernenden angewandt worden. Besonders bei Bruchstellen im Beweisprozess ermöglicht der Blick auf das Wechselspiel zwischen Inhalts- und Beweisebene vertiefte Einblicke in die Prozesse und liefert mögliche Erklärungsansätze für die auftretenden Schwierigkeiten. Im Folgenden wird die Konzeption des Designexperiments skizziert und dann exemplarisch ein Bruch in den Beweisprozessen von drei Lernenden beschrieben und mit Hilfe des Modells von Hemmi erklärt.

Ergebnisse

Zentral für das von uns entwickelte Designexperiment war ein Zyklus: Beweisrezeption, Beweisdiskussion und Beweiskonstruktion. Die Lernenden haben diesen Zyklus insgesamt drei Mal durchlaufen. Ausgangspunkt bildeten die Vorstellungen der Lernenden bezüglich mathematischer Beweise. Diese wurden erneut am Ende des Designexperiments erhoben, um mögliche Veränderungen rekonstruieren zu können. Ziel des Designexperiments war es, das Verständnis von mathematischen Beweisen im Bereich der Analysis bei Lernenden des 10. Jahrgangs zu fördern.

Anhand von prototypischen Schülerbeweisen (angelehnt an Healy & Hoyles 1998) zur Aussage, dass eine ganzrationale Funktion zweiten Grades genau eine Extremstelle besitzt, sollten die Schülerinnen und Schüler zunächst eine Validierung der Aussage vornehmen. Im Anschluss wurden in den Klassen über diese Beweise diskutiert und auf dieser Grundlage Kriterien für mathematische Beweise entwickelt. Die Diskussionsphasen ermöglichten es der Lehrperson, einen Fokus auf die Beweisebene zu legen und damit die Aufmerksamkeit der Lernenden auf zentrale Charakteristika von Beweisen, etwa ihre Struktur oder Funktionen zu legen („Sichtbarkeit“). Nach dem Modell von Hemmi findet dabei jedoch auch immer ein Wechsel zur Inhaltsebene statt, indem die Lernenden beispielsweise bei der Validierung der Beweise auf die benötigten inhaltlichen Theoreme und deren Zusammenhänge fokussieren („Unsichtbarkeit“). Dieses Wechselspiel zeigt sich beispielsweise bei der Diskussion des folgenden prototypischen Schülerbeweises:

Lisas Begründung:

„Wenn eine ganzrationale Funktion den Grad 2 hat, dann ist der Grad der Ableitungsfunktion f' genau 1 und f '' ist konstant und ungleich Null. Jede ganzrationale Funktion 1. Grades hat genau eine Nullstelle x_e. Diese Nullstelle ist damit die einzige Extremstelle x_e von f, da f '' konstant und f ''(x_e) ungleich Null ist. **Daher ist die Aussage wahr.“**

Die Begründung wurde häufig von den Lernenden auf einer Inhaltsebene betrachtet und bewertet, indem sie z.B. untersucht haben, welche mathematischen Sätze von Lisa explizit angeführt wurden, inwieweit ihre logische Struktur korrekt sei und welche Zusammenhänge zwischen diesen Theoremen bestehen. Diese Betrachtungen geschehen auch im Wechsel mit der Beweisebene, auf der den Lernenden Kriterien wie eine logische Struktur oder auch die Allgemeingültigkeit gegenwärtig werden. Dies zeigt sich beispielhaft bei Till, wenn er Lisas Beweis aufgrund von Kriterien der Beweisebene (in diesem Fall eine bestimmte Darstellungsform) ablehnt, obwohl nach Tills Auffassung die Begründung auf einer inhaltlichen Ebene korrekt sein könne.

> *„Aber ich würde sagen, dass für nen Beweis ne gewisse Schreibweise von Nöten ist und deswegen ist das für mich kein Beweis, auch wenn es vielleicht inhaltlich alles stimmt, muss man ja ne gewisse Form wahren.“* *(Till, 10d)*

In den anschließenden eigenständigen Beweisprozessen liefert das Wechselspiel zwischen der Beweis- und Inhaltsebene auch mögliche Erklärungsansätze für auftretende Bruchstellen. Dies soll im Folgenden exemplarisch an einem Beweisprozess aufgezeigt werden. Mit Hilfe des Modells soll verdeutlicht werden, warum es den Lernenden schließlich nur mit starker Intervention gelingt, einen eigenständigen Beweis zu führen bzw. zu notieren.

Gegeben ist die mathematische Aussage, dass eine ganzrationale Funktion geraden Grades mindestens eine Extremstelle besitzt. Auf der Inhaltsebene ziehen Brady, Luke und Mason zunächst die notwendige und hilfreiche Bedingung für die Existenz von Extremstellen heran. Im Anschluss versuchen sie, diese Argumentation allgemeingültig und logisch deduktiv zu notieren (Beweisebene). Dabei tritt die Schwierigkeit auf, dass Brady, Luke und Mason nicht in der Lage sind, ihren inhaltlichen Ansatz in algebraischer Form zu notieren. Dies scheint für die drei jedoch für einen mathematischen Beweis notwendig zu sein, sofern die Beweisebene betreten wird. Dies führt nach einiger Zeit dazu, dass Brady schließlich auf der Inhaltsebene einen neuen Ansatz verfolgt und nun den Verlauf von ganzrationalen Funktionen geraden Grades im Unendlichen betrachtet. Daraus folgert er schließlich, dass die Aussage wahr ist. Obgleich er auf der Inhaltsebene durchaus eine tragfähige Beweisidee entwickelt hat, lässt er diese aufgrund seiner algebraischen Vorstellung von Beweisen (Beweisebene) nicht gelten, da er keine Möglichkeit hat, diese formal algebraisch zu realisieren. Der folgende Auszug aus dem Interview verdeutlicht dies.

> *Brady – „Mathematically, we didn't complete it. It wasn't completed. What we were trying to say was there's two high points, so at some point there has to be a point where, for the lack of a better term, bottoms out. Or vice versa, it will cap and go down. And we were just trying to put that into words and, but, we didn't finish."*

Die beschriebene Episode veranschaulicht sowohl das stattfindende Wechselspiel zwischen der Inhalts- und Beweisebene in dem eigenständigen Beweisprozess als auch dessen Fragilität. So führt ein Problem auf einer der beiden Ebenen dazu, dass die Lernenden nicht zu einem eigenständigen Beweis gelangen bzw. ihre Lösung nicht als Beweis bewerten.

Fazit

Das beschriebene theoretische Modell „Problematik der Sichtbarkeit" stellt eine fruchtbare Perspektive dar, Schwierigkeiten und Brüche in Beweisprozessen zu beschreiben und zu erklären. Dies kann auch Lehrerinnen und Lehrer ein Bewusstsein für dieses Wechselspiel zwischen Beweis- und Inhaltsebene vermitteln. So wird es ihnen möglich, auftretende Probleme bei den Lernenden besser zu verstehen und auf einer der beiden Ebenen gezielte Hilfestellungen zu geben. Auch eröffnet es didaktisch die Möglichkeit, bei Beweisprozessen den Fokus gezielt auf die meist unbewusst stattfindenden Wechsel zu legen. Darüber hinaus scheint es notwendig, im Unterricht verstärkt die Beweisebene zu thematisieren, um ein Beweisverständnis zu fördern, welches sich nicht auf eine algebraische Darstellung beschränkt.

Literatur

Grundey, S., Knipping, C. (2014). Beweisvorstellungen und deren Einfluss auf die eigenständigen Beweise. In: *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014,* 463–466, Münster, WTM-Verlag.

Healy, H. & Hoyles, C. (1998). Justifying and Proving in School Mathematics. Technical Report on a Nationwide Survey. 1998.

Hemmi, K. (2006). Approaching proof in a Community of Mathematical Practice. Stockholm, 2006.

Hemmi, K. (2008). Students' encounter with proof: the condition of transparency. In: *ZDM - The International Journal on Mathematics Education 2008, 40,* 413–426.

Weber, K. (2001). Student difficulties in constructing proofs: The need for strategic knowledge. *Educational Studies in Mathematics*, *48*, 101–119.