Roland GUNESCH, Feldkirch

Forschendes Lernen als Zugang zu mathematisch anspruchsvollen Stellen in der Studierendenausbildung

Zusammenfassung

In diesem Beitrag wird beschrieben, wie Studierende mittels einem speziellem Ansatz des Forschenden Lernens mathematisch anspruchsvolle bzw. schwierige Stellen besser (oder überhaupt) verstehen können. Solche Stellen können insbesondere sein: mathematische Beweise (bzw. deren Kernidee) sowie entscheidende (aber leicht zu übersehende) Voraussetzungen von mathematischen Aussagen. Studierenden soll vermittelt werden, dass Beweise interessant und spannend sein können, und sie erlangen spielerischen Zugang zu präzisem mathematischen Argumentieren.

Es wird überlegt, wie diese Methode Lehramtsstudierenden ermöglichen kann, später im eigenen Schulunterricht ähnliche Methoden einzusetzen, um SuS zu selbständigem mathematischen Handeln anzuleiten.

Mathematische Beweise aus Studierendensicht

Studierende (insbesondere im Lehramt Mathematik, speziell in der Studieneingangsphase) finden Beweise oft problematisch. Viele Studierende finden Beweise zu schwer, zu abstrakt, zu technisch, zu theoretisch; statisch, fertige Produkte; nur mit Mühe nachvollziehbar; langweilig, frustrierend; ohne Bezug zur Schule, keine brauchbare Lehrmethode; historisch, erstellt von Genies, aber nicht von Studierenden (z.B. sich selbst).

Standard in Vorlesungen ist es, jeden Beweis als fertigen Text zu präsentieren (was ein Beweis aus Dozierenden-Sicht auch ist). D.h.: Voraussetzungen, Schlussfolgerungen werden sorgfältig aufgeschrieben in „minimal geschriebener“ Form, d.h. ohne Überflüssiges. Wichtige Zwischenergebnisse des Beweises werden aufgeschrieben, kleinere Umformungen dagegen oft nur mündlich gesagt (vielleicht in der Annahme, dass Studierende solche mündliche Information zuverlässig aufnehmen, verstehen und behalten).

Die vorgeschlagene Lehrmethode im Detail

Folgende Unterrichtsmethode könnte für die Studierenden interessanter sein und bessere Lernerfolge zu erreichen. Die Studierenden erhalten diverse mathematische Aussagen ohne vorgegebene Reihenfolge. Dies geschieht z.B. auf Papier-Kärtchen oder anklickbar innerhalb einer passenden Software. Diese Aussagen sollen von den Studierenden in die richtige Reihenfolge gebracht werden. Gesucht bzw. zu überlegen sind somit die Implika-

In Institut für Mathematik und Informatik Heidelberg (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2016* (S. x–y). Münster: WTM-Verlag

tions-Pfeile bzw. Schritte. Anschließend kann zur Ergebnissicherung eine Phase des Aufschreibens folgen.

Der Beweis wird als gerichteter Graph verstanden. Die Knoten (Ecken) des Graphen sind mathematische Aussagen („Es gilt *A*"), die Kanten (im Folgenden „Pfeile" genannt) des Graphen sind Implikationen („Aus *A* folgt *B*"), Deduktionen und Umformungen. Hier sind die Knoten des Graphen vorgegeben (der Fokus ist also auf den Aussagen), und die Studierenden sollen die Pfeile (und Reihenfolge) finden.

Optional können auch Aussagen dabei sein, die bei diesem Beweis nicht helfen (Distraktoren). Optional ist es auch möglich, Aussagen in Mitte wegzulassen und dadurch den Schwierigkeitsgrad zu erhöhen.

Für ein solches E-Proof-System (sowie Analyse von E-Proof-Systemen generell) siehe (Platz & Niehaus, 2015; Platz et al., 2015; Platz, Niehaus et al., 2014; Niehaus & Faas, 2013). Zu Distraktoren siehe Winter (2011).

Eine zweite Art, Beweise zu verstehen, besteht darin, den Fokus auf mathematisches Handeln statt auf Aussagen zu legen. D.h. es geht primär weniger darum, welche korrekten Aussagen in einem Beweis vorhanden sind, sondern vielmehr darum, wie von einer zur nächsten korrekten Aussage geschlossen werden kann. Dies entspricht auch dem, was Dozierende in der Vorlesung oft sagen und nicht aufschreiben, was aber wichtig ist („Wir machen jetzt … ", „Wir setzen hier ein … ", „Wir wenden jetzt … an… "). Der Beweis wird also wieder als Graph verstanden, aber diesmal ist der Fokus auf den Pfeilen; diese sind vorgegeben und von den Studierenden mit passenden Knoten (Aussagen) zu einem Beweis zusammenzufügen.

Eine Unterrichtsmethode zu dieser zweiten Denkart ist, die Argumente der Implikations-Pfeile (mathematischen Schritte) auf Kärtchen oder anklickbar den Studierenden zu präsentieren. Die Aussagen am Ende eines Pfeils und Anfang des nächsten Pfeils müssen zugeordnet („gematcht") werden. Das ist nicht trivial wegen anderen Schreibweisen und Implikationen: z.B. passen die Aussagen „Für alle reellen x gilt $A(x)$" und „Wenn y reell ist, dann gilt $A(|y|)$" nur in einer Richtung zusammen.

Optional lassen sich wieder Distraktoren (Irrwege) einsetzen. Optional wären auch fehlende Pfeile (um die Aufgabe zu erschweren). Es gibt auch viele Möglichkeiten für kleine ad-hoc-Übungsaufgaben.

Um nicht zu viele eingehende Pfeile einbeziehen zu müssen, besteht eine Vereinfachung darin, einen mitwachsenden „Pool" von Aussagen dazu zu denken (z.B. können die schon bewiesenen Aussagen in eine Liste geschrieben werden, und Vorheriges wird als bekannt angenommen, ohne einen Pfeil zu platzieren).

Einordnung in Forschendes Lernen und in experimentelle Mathematik

Aus Studierendensicht handelt es sich bei dieser Art, Beweise zu finden, um eine Art Kombinationsspiel. Insbesondere können sie sich aktiv einbringen, und die Beschäftigung kann vergnüglich sein. Diverse Verbindungen zu vorhandenem Wissen lassen sich nutzen. Aussagen lassen sich auf Plausibilität prüfen (z.B. durch Einsetzen von Zahlen). Vermutungen lassen sich anstellen und testen. Falsche Aussagen (Distraktoren) sind zu erkennen; dies trainiert Urteilsfähigkeit und Sorgfalt.

Graphen auf die beschriebene Weise selbst zusammenzubauen ist für die Studierenden sicherlich „Forschen“, und den Beweis anschließend aufzuschreiben ist „Lernen“. Es handelt sich insgesamt um eine Form von Forschendem Lernen (Lutz-Westphal, 2014; Roth & Weigand 2014a, 2014b; Ulm, 2009). Das Vorgehen passt auch zu experimenteller Mathematik.

Möglicher Einsatz im Mathematikunterricht in der Schule

In der Schule bietet sich eine solche Methode an, um Umformungsketten (statt Beweise) zu finden. Die in der Schule verwendeten Umformungsketten lassen sich ebenfalls als Graph interpretieren: Die Knoten des Graphen sind die Terme (z.B. Terme, die vereinfacht werden sollen), und die Kanten/Pfeile des Graphen sind Rechenregeln und verwendete Formeln. Es bieten sich dieselben Möglichkeiten wie zuvor:

1. Terme sind vorgegeben; SuS sollen sie in die richtige Reihenfolge bringen und die nötigen Umformungsschritte finden.
2. Regeln/Formeln sind angeben; SuS überlegen, welche Terme mit diesen Regeln jeweils erzeugt werden.

Distraktoren sind wieder hilfreich und sinnvoll (ansonsten lässt sich die richtige Reihenfolge von Termen manchmal ohne mathematisches Nachdenken „sehen“, indem die Terme der Länge nach geordnet werden).

Der Einsatz dieser Methode in der Schule könnte bewirken, dass die SuS über folgende Punkte nachdenken: „Was, wenn die Voraussetzung … nicht gilt?“, „Ist es wichtig, dass …?“ (richtige/falsche Verallgemeinerungen), „Was ändert sich, wenn …?“, „Wofür brauche ich …?“

Diese Vorgehensweise führt idealerweise dazu, dass SuS den Mathematikunterricht und mathematisches Arbeiten interessanter finden.

Vielleicht wäre es mit dieser Methode sogar möglich, SuS manche Beweise zu schmackhaft zu machen; dies müsste separat diskutiert werden.

Die vorgestellte Methode ermöglicht auch eine deutliche Abkehr vom fragend-entwickelnden Unterrichtsgespräch; dies ist eine zentrale Forderung z.B. in (Ulm, 2005). Statt ganz kleiner von der Lehrperson vorgegebener Schritte sollten SuS größere aktive Zeitphasen zum Überlegen und eigenständigen mathematischen Handeln bekommen. Ein möglicher Unterrichtsverlauf zum Aufgabenlösen könnte so aussehen:

1. Die Aufgabenstellung wird gemeinsam geklärt.
2. Die SuS arbeiten selbstständig alleine oder in Kleingruppen (dies ist die wichtigste Phase). Hier kann die o.g. Methode eingesetzt werden.
3. Die Kleingruppen stellen ihre Ergebnisse der Klasse vor.

Die Methode der Arbeit mit Umformungsketten würde vermutlich besonders gut unterrichtet von Lehrpersonen, die als Lehramtsstudierende die entsprechende Methode mit Beweisen persönlich kennen gelernt haben.

Literatur

Platz, M., & Niehaus, E. (2015). To “E” or not to “E”? That is the Question. Chancen & Grenzen eines E-Proof-Systems zur Förderung von Beweiskompetenzen. In: Beiträge zum Mathematikunterricht 2015. Münster: WTM-Verlag.

Platz, M., Krieger, M., Winter, K., Niehaus, & E., Dahn, I. (2015). Beweisen lernen durch Beweisen lehren? - Chancen und Grenzen dieses Konzeptes. In: Beiträge zum Mathematikunterricht 2015. Münster: WTM-Verlag.

Platz, M., Niehaus, E., Dahn, I., & Dreyer, U. (2014). IMathAS & automated Assessment of mathematical Proof. In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 915–919). Münster: WTM-Verlag.

Niehaus, E., & Faas, D. (2013). Mathematische Beweise in elektronischen Klausuren in der Lehramtsausbildung. In: Beiträge zum Mathematikunterricht 2013. Münster: WTM-Verlag.

Winter, K. (2011): Entwicklung von Item-Distraktoren mit diagnostischem Potential zur individuellen Defizit- und Fehleranalyse – Didaktische Überlegungen, empirische Untersuchungen und konzeptionelle Entwicklung für ein internetbasiertes Mathematik-Self-Assessment. Münster, WTM-Verlag.

Lutz-Westphal, B. (2014). Was macht forschendes Lernen im Mathematikunterricht aus? In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 779–782). Münster: WTM-Verlag.

Roth, J., & Weigand, H.-G. (2014a). Forschendes Lernen – Eine Annäherung an wissenschaftliches Arbeiten. *Mathematik lehren 184*, S. 2-10.

Roth, J. & Weigand, H.-G. (2014b). Forschendes Lernen im Mathematikunterricht. In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 999–1002). Münster: WTM-Verlag.

Ulm, V. (2005). Mathematikunterricht für individuelle Lernwege öffnen. 2. Auflage. Seelze: Kallmeyer.

Ulm, V. (2009). Eine natürliche Beziehung – Forschendes Lernen in der Mathematik. In R. Messner (Hrsg.), *Schule forscht. Ansätze und Methoden zum forschenden Lernen* (S. 89–105). Hamburg: edition Körber-Stiftung.