

Leander KEMPEN, Paderborn; Miriam KRIEGER, Münster; Petra Carina TEBAARTZ, Gießen

Über die Auswirkungen von Operatoren in Beweisaufgaben

Im vorliegenden Beitrag wird ein Einblick in das Projekt „O.B.d.A.“: „Operatoren in Beweisaufgaben – eine didaktische Analyse“ gegeben. Ferner wird an exemplarischen Ergebnissen dargestellt, welche Unterschiede in Beweisbearbeitungen von Erstsemesterstudierenden ausgemacht werden konnten, in denen die Aufgabenoperatoren systematisch permutiert worden waren.

Theoretischer Hintergrund

Dreyfus (1999) führt verschiedene Gründe an, warum Lernende Probleme beim Beweisen haben. Dort heißt es:

The examples [...] provide ample room for questioning what is expected by the different formulations used, including ‘explain’ [...], ‘justify’ [...], ‘prove’ [...], and ‘show that’ [...]. Does ‘show that’ mean ‘formally prove’ or ‘use an example to demonstrate that’ (or something intermediate between these two)? Does ‘explain’ mean explain to a fellow student or explain in such a way as to convince the teacher that you understand the reasoning behind the claim? (S. 103f.).

Diese Frage nach der (impliziten) Bedeutung von Operatoren in Beweisaufgaben für Lernende scheint dabei aus verschiedenen Gründen berechtigt. So werden etwa den Operatoren „beweisen“, „zeigen“, „begründen“ und „erklären“ im schulischen Kontext verschiedene Bedeutungen zugewiesen (Kultusministerkonferenz, 2012). Was Lernende allerdings unter Beweis/Begründung/Erklärung etc. verstehen, wird im unterrichtlichen Geschehen im Rahmen sogenannter sozio-mathematischer Normen herausgebildet (Yackel & Cobb, 1996). Im Rahmen dieses Aushandlungsprozesses von Normen können auch semiotische Normen entstehen, so dass Lernende mit verschiedenen Aufgaben(-stellungen) die Nutzung bestimmter semiotischer Ressourcen verbinden (Dimmel & Herbst, 2014; Kempen & Biehler, 2016). Dies könnte etwa dazu führen, dass beim Beweisen verstärkt Buchstabenvariablen verwendet werden, wohingegen Begründungen eher narrativ gehalten sind.

Forschungsanliegen und Forschungsfragen

Aus hochschuldidaktischer Perspektive ist die Frage interessant, mit welchen (impliziten) sozio-mathematischen Normen in Bezug auf das Beweisen Erstsemesterstudierenden ihr Universitätsstudium beginnen. An dieser Stelle möchten wir die folgende Forschungsfrage thematisieren: Inwiefern lassen sich bei Beachtung der verwendeten Operatoren systematische Be-

In Institut für Mathematik und Informatik Heidelberg (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2016* (S. x–y). Münster: WTM-Verlag

arbeitsunterschiede in Beweisproduktionen von Erstsemesterstudierenden (hier: Lehramt Mathematik) ausmachen?

Durchführung und Auswertung

Im Wintersemester 2015/16 wurden an den Universitäten Gießen, Münster und Paderborn in der jeweils ersten Lehrveranstaltungssitzung zwei Beweisaufgaben an die Studierenden ausgeteilt, in denen zwischen den Aufgaben die Operatoren „Beweisen Sie...“, „Zeigen Sie...“, „Begründen Sie...“ und „Erklären Sie...“ systematisch permutiert worden waren. Die zu verifizierenden Aussagen waren hierbei: (1) *Die Summe aus einer ungeraden natürlichen Zahl und ihrem Doppelten ist immer ungerade* und (2) *Das Produkt von drei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen ist immer durch sechs teilbar*.

Während der Nachweis der Gültigkeit der Behauptung (1) gut mithilfe von Buchstabenvariablen vollzogen werden kann, ist der Nachweis der Behauptung (2) mit Buchstabenvariablen deutlich anspruchsvoller. An dieser Stelle würde sich eine inhaltliche narrative Begründung anbieten.

Aufgrund der zu Beginn des Fragebogens erhobenen personenbezogenen Daten konnten insgesamt Beweisbearbeitungen von 390 Erstsemesterstudierenden (Lehramt Mathematik) erhoben werden. Darunter 70 Gymnasiallehramtsstudierende, 149 Studierende für das Lehramt an Haupt-, Real- und Gesamtschule und 171 Grundschullehramtsstudierende.

Exemplarische Ergebnisse

In diesem Artikel stellen wir die Ergebnisse in Bezug auf die folgenden drei Aspekte dar: (i) Art der Bearbeitung (begründender oder prüfender Ansatz), (ii) die Verwendung von Buchstabenvariablen bei begründendem Ansatz und (iii) die Anzahl verwendeter Wörter bei begründendem Ansatz.

Alle Bearbeitungen wurden nach der **Art der Bearbeitung** in eine der folgenden Kategorien eingeordnet: (a) „prüfender Ansatz“ (die Bearbeitung besteht ausschließlich aus der Überprüfung einzelner konkreter Fälle) und (b) „begründender Ansatz“ (in der Bearbeitung wird ein Begründungsversuch vorgenommen, der über das bloße Testen von konkreten Fällen hinausgeht). In den Bearbeitungen zu beiden Beweisaufgaben enthielten die Bearbeitungen zum Operator „Zeigen Sie...“ den höchsten Anteil mit prüfendem Ansatz. In der Beweisaufgabe (1) zeigte sich ein signifikant höherer Anteil der Bearbeitungen mit prüfendem Ansatz bei dem Operator „Zeigen Sie“ (26%) im Gegensatz zum Operator „Erklären Sie“ (17%) [Chi²-Test, $p=.021$]. In der Beweisaufgabe (2) war der Unterschied zwischen dem Operator „Zeigen Sie“ (54%) und „Begründen Sie“ (40%) statistisch hoch signifikant [Chi²-Test, $p=.002$].

Bzgl. der **Verwendung von Buchstabenvariablen bei begründendem Ansatz** ließen sich bei den Bearbeitungen zu Aufgabe (1) signifikante Unterschiede feststellen. Die Anteile der Bearbeitungen mit Buchstabenvariablen waren getrennt nach den verwendeten Operatoren wie folgt: „Erklären Sie“: 26,7%, „Begründen Sie“: 26,7%, „Zeigen Sie“: 62,3% und „Beweisen Sie“: 76,1%. Der Anteil von 76,1% der Aufgabenbearbeitungen mit Buchstabenvariablen bei dem Operator „Beweisen Sie“ war statistisch signifikant höher als bei den Operatoren „Begründen Sie“ ($p < .001$) und „Erklären Sie“ ($p < .001$). Auch der Prozentsatz von 62,3% bei dem Operator „Zeigen Sie“ war signifikant höher als bei den Operatoren „Begründen Sie“ ($p < .001$) und „Erklären Sie“ ($p < .001$). Bei Aufgabe (2) lagen keine statistisch signifikanten Unterschiede vor.

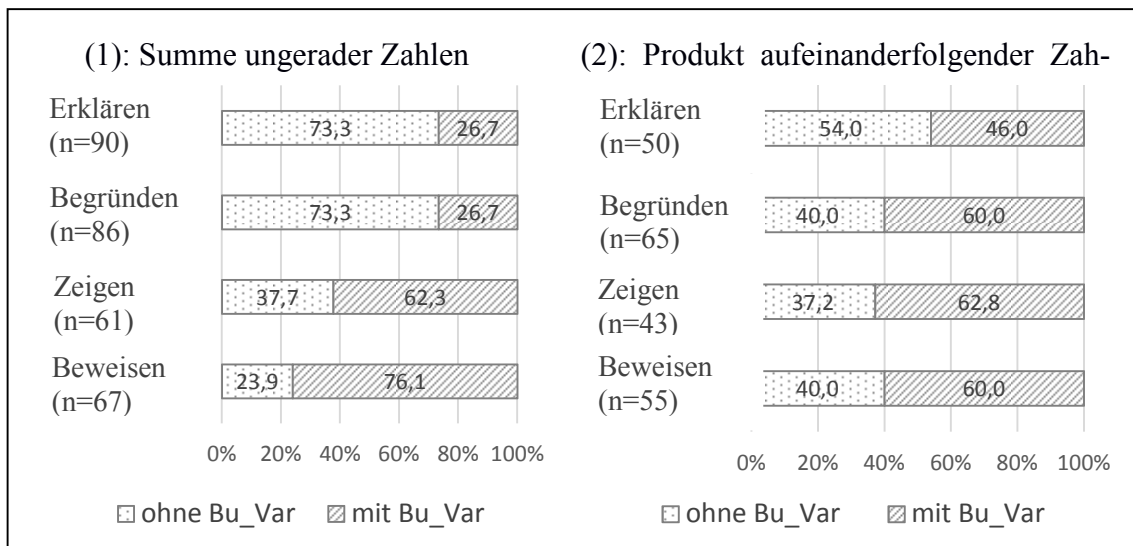


Abbildung 1: Verwendung von Buchstabenvariablen differenziert nach Operatoren

Bei Betrachtung der **Anzahl** der in den Aufgaben **bei begründendem Ansatz verwendeten Wörter** konnten ebenfalls bei den Bearbeitungen zu Aufgabe (1) statistisch signifikante Unterschiede bei Beachtung der Operatoren ausgemacht werden. Die arithmetischen Mittel der bei begründendem Ansatz in dieser Aufgabe verwendeten Wörter waren hierbei: „Beweisen Sie“: 17,91, „Zeigen Sie“: 17,11, „Begründen Sie“: 32,63 und „Erklären Sie“: 31,60. Damit wurden in den Bearbeitungen mit dem Operator „Beweisen Sie“ statistisch hoch signifikant weniger Wörter verwendet, als bei den Operatoren „Begründen Sie“ (T-Test, $p < .001$; cohens $d = 1.02$) und „Erklären Sie“ (T-Test, $p < .001$; cohens $d = .83$). Dies traf auch für die Bearbeitungen zu dem Operator „Zeigen Sie“ zu (vs. „Begründen Sie“: $p < .001$; cohens $d = 1.05$ und vs. „Erklären Sie“: $p < .001$; cohens $d = .85$).

Schlussbetrachtung

Im Rahmen der hier vorgestellten Untersuchung konnte gezeigt werden, dass die Wahl von Beweisoperatoren Auswirkungen auf die entsprechenden Bearbeitungen haben kann. Während der Operator „Zeigen Sie“ Aufgabenbearbeitungen mit rein empirischen Überprüfungen begünstigt, werden in Bearbeitungen zu den Operatoren „Zeigen Sie“ und „Beweisen Sie“ bei begründendem Ansatz statisch signifikant häufiger Buchstabenvariablen und weniger Wörter verwendet. Dass die meisten Unterschiede nur im Kontext der Aufgabe (1) ausgemacht werden können, ist vermutlich darauf zurückzuführen, dass die Aufgabe (2) für die hier betrachteten Studierenden als zu schwer einzustufen ist. Es liegt dabei auf der Hand, dass die Wahl von Operatoren dann kaum Einfluss auf die Bearbeitungen hat. Die erhaltenen Ergebnisse stützen dabei sowohl die Theorie soziomathematischer Normen als auch den Aspekt semiotischer Normen. Es kann schließlich weiter vermutet werden, dass je nach gestellter Beweisaufgabe, die hier betrachteten Auswirkungen von Operatoren auch die Qualität von Beweisbearbeitungen beeinflussen kann.

Literatur

- Dimmel, J. K. & Herbst, P. G. (2014). What details do geometry teachers expect in students' proofs? A method for experimentally testing possible classroom norms. In P. Liljedahl, C. Nicol, S. Oesterle & D. Allan (Hrsg.), *Proceedings of the Joint Meeting of PME 38 and PME-NA 36* (Bd. 2, S. 393-400). Vancouver, Canada: PME.
- Dreyfus, T. (1999). Why Johnny can't prove. *Educational Studies in Mathematics*, 38(1), 85-109.
- Kempen, L., & Biehler, R. (2016). Pre-service teachers' perceptions of generic proofs in elementary number theory. In K. Krainer & N. Vondrová (Hrsg.), *Proceedings of the 9th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (S. 135-141). Prague: CERME.
- Knipping, C., Rott, D. & Reid, D. (2016). Disparate arguments in mathematics classrooms. In K. Krainer & N. Vondrová (Hrsg.), *Proceedings of the 9th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (S. 142-148). Prague: CERME.
- Kultusministerkonferenz (2012). Operatoren für das Fach Mathematik. Verfügbar unter http://www.kmk.org/fileadmin/Dateien/pdf/Bildung/Auslandsschulwesen/Kerncurriculum/Operatoren_fuer_das_Fach_Mathematik_Stand_Oktober_2012_ueberarbeitet.pdf [18.03.2016].
- Schupp, H. (1986). Zur didaktischen Analyse des Teilungsproblems. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 7(2-3), 217-222.
- Yackel, E., & Cobb, P. (1996). Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27(4), 458-477.