Renate MOTZER und Adrian SCHLOTTERER, Augsburg

Wurzelziehen mit dem Malkreuz

Bekannt ist vielen das Wurzelbrett der Montessori-Pädagogik. Montessori-Schüler und –Lehrer sind vielfach stolz darauf, dass sie Wurzeln auch ohne Taschenrechner berechnen können. Außerhalb von Montessori-Schulen wird das händische Wurzelziehen kaum mehr gelernt.

Wie lassen sich günstige Bedingungen so gestalten, dass junge Menschen auch ohne Wurzelbrett solch einen komplexen mathematischen Zusammenhang wie das Wurzelziehen einer Zahl erforschen wollen? Hier liefert das Malkreuz eine gute Möglichkeit, den Kindern ein anschauliches Werkzeug an die Hand zu geben, mit dem sie relativ schnell und effizient die Wurzel einer Quadratzahl bestimmen können. Außerdem heißt es z.B. im gymnasialen Lehrplan Bayerns für die fünfte Klasse: „Der Mathematikunterricht des ersten Jahrs am Gymnasium knüpft an die Inhalte und Methoden der Grundschule an, er vertieft, systematisiert und erweitert die dort erworbenen Kenntnisse und Fähigkeiten." Dieses Anliegen könnte durch die Verwendung eines Malkreuzes beim Wurzelziehen erfüllt werden.

1 Malkreuz als Vorwissen

Das Malkreuz als visuelles Recheninstrument für die Multiplikation war in der untersuchten Klasse den meisten Kindern aus der Grundschule bekannt. Dies lässt sich auch am Fragebogen nachweisen, in dem ca. 65% der Befragten (18 von 28 Schülern) angaben, dass sie das Malkreuz als halbschriftliche Rechenstrategie kennen würden. Fast alle Schüler beherrschten nach dem Unterrichtsgang einen sicheren Umgang mit der Darstellungsform, wie sich bei der Bearbeitung eines Fragebogens gezeigt hat. Diese Visualisierung kann sinnvoll eingesetzt werden, um ein höheres Verständnis für formale Rechenoperationen (wie das Wurzelziehen) zu generieren.

Das Malkreuz ist eine distributive Zerlegung und stellt zugleich eine Verbindung zum Vierhunderterfeld her, das bereits aus der Grundschule bekannt ist. Das Rechteckfeld kann durch eine horizontale und vertikale Linie dem Distributivgesetz entsprechend in vier Rechteckteilfelder zerlegt werden. Dieser Zusammenhang zwischen Malkreuz und Vierhunderterfeld wurde beim Einstieg des Unterrichtsgangs fruchtbar gemacht.

Das untenstehende Bild zeigt ein Malkreuz, das die Multiplikation der Zahl 15 mit sich selbst veranschaulicht. So kann das Malkreuz als eine Art Multiplikationstabelle gedeutet werden.

•	10	5	
10	100	50	- 150
5	50	25	- 75
			225

Darstellungsmittel wie das Malkreuz sind einerseits Lernhilfen, weil sie mathematische Sachverhalte veranschaulichen, und andererseits Lernstoff, da der Gebrauch mit ihnen und der Umgang mit deren Bedeutungen von den Schülern erst erlernt werden muss.

Allgemein ist zu beachten, dass visuelle Darstellungen wie das Malkreuz nicht nur zum Rechnen, sondern auch zum Entdecken, Beschreiben und Begründen eingesetzt werden können.

Beispielaufgabe:

> Schätze zuerst, welches Produkt wohl größer sein wird: $64 \cdot 57$ oder $46 \cdot 75$? Veranschauliche die Situation an einem Malkreuz und berechne anschließend.
>
> Fällt dir bei den Malkreuzen etwas auf? Findest du eine Regel, mit der du entscheiden kannst, welches Produkt immer größer ist?
>
> Vergleiche dazu auch die beiden Produkte $36 \cdot 72$ und $63 \cdot 27$.

Die intendierte Erkenntnis ist hier: Nur das Produkt der Zehnerstellen entscheidet, welches Gesamtprodukt letztlich größer ist.

2 **Herleitung des Wurzelziehens**

Nun sei eine 3-4 stellige Quadratzahl gegeben und ihre Wurzel gesucht. Die erste binomische Formel lautet bekanntermaßen: $(a + b)^2 = a^2 + 2\,ab + b^2$ und ist mit dem Malkreuz entsprechend identifizierbar. Angenommen die Zehnerstelle wurde gefunden, so ist die Variable a, sowie das innere Feld a^2 bekannt.

Was wissen wir nun über die Einerstelle (Variable b)? Die übrigen drei inneren Felder ba, ab und b^2 müssen aufsummiert genau die Zahl ergeben, die als Ergebnis aus der Subtraktion von Radikand und a^2 hervorgeht.

Somit erhält man vorerst folgende Gleichung: $2\,ab + b^2 = \text{Radikand} - a^2$.

•	a	b	
a	a^2	ab	- $a^2 + ab$
b	ba	b^2	- $ba + b^2$ insgesamt $(a+b)^2$.

Die einzelnen Strategieschritte sollen an einem explizitem Beispiel erläutert werden: Bestimme $\sqrt{5041}$.

Reformulierung der Aufgabenstellung: Finde diejenige Zahl, die quadriert (bzw. mit sich selbst multipliziert) die Zahl unter der Wurzel, also 5041, ergibt.

1. $50 > 49 = 7^2$, $70^2 = 4900 < 5041$ (Bestimmung der Zehnerstelle)

•	70	b
70	4900	$70 \cdot b$
b	$b \cdot 70$	b^2

$\boxed{5041}$

2. Nebenrechnung: 5041 – 4900 = 141. Diese Zahl muss auf die übrigen drei inneren Felder verteilt werden (spätere Kontrolle).

3. Betrachten wir nun die Endziffer der Zahl unter der Wurzel, um die Einerstelle der Quadratwurzel zu besetzen: die 1 an der Einerstelle des Radikanden kann nur das Ergebnis der Quadrate 1^2 und 9^2 sein. Von den möglichen Einerstellen 1 – 9 stehen somit nur noch die Zahlen 1 und 9 zur Verfügung. Mit der „Tabellenmethode“ kommt wohl nur eine Einerstelle im unteren Bereich (1, 2 oder 3) in Frage, da der Abstand zum Radikanden ziemlich gering ist (eben nur 141).

Werden beide Überlegungen miteinander kombiniert, so fällt die Wahl schnell auf die Zahl 1, um die Einerstelle passend zu besetzen (Bestimmung der Einerstelle).

3 **Schüleraussagen zum Malkreuz und zum Wurzelziehen**

Wie hast du das Rechnen mit dem Malkreuz verstanden?

Sehr gut *Gut* *Naja* *Ich verstehe es nicht*

Bei der zweiten Frage war ein deutliches Verständis erkennbar: 15 kreuzten „*Sehr gut*“ an, 9 entschieden sich für „*Gut*“ und 3 für „*Naja*“. Lediglich ein Kind gab an, das Malkreuz auch nach dem Unterrichtsgang nicht zu verstehen. Die Grundvoraussetzung, um das Wurzelziehen mithilfe des Malkreuzes überhaupt beherrschen zu können, ist also bei fast allen Kindern gegeben.

Wie findest du das Malkreuz verglichen mit der „normalen“ schriftlichen Multiplikation? Kannst du gut damit rechnen?

Fast alle Schüler trauten sich zu, mit dem Malkreuz gut rechnen zu können. Es standen aber Bedenken (z.B. zusätzlicher Zeitaufwand für die Skizze) im Raum, die bei den meisten Kindern das „normale“ schriftliche Multiplikationsverfahren zunächst attraktiver erscheinen lässt. Weiterhin ließen sich zwiegespaltene Meinungen finden, die Vorteile in beiden Strategien sahen: „*Also ich kann damit* [erg. Malkreuz] *besser, vor allem leichter rechnen. Aber es dauert etwas länger*.“

Immerhin befanden sieben Kinder das Malkreuz (trotz des Zeitaufwands) für eine bessere Lösungsstrategie, was einer 1/4 – Minderheit entspricht.

Wie gefällt dir das Wurzelziehen? Versuche in deinen eigenen Worten zu beschreiben, was das Wurzelziehen ist.

10 Schüler ließen die Frage unbeantwortet. 11 Kinder befinden das Wurzelziehen für „gut“ bis „sehr gut“, 4 stehen dem Wurzelrechnen neutral gegenüber („okay/naja“). Weniger als 10% (3 Kinder) finden keinen Gefallen am Wurzelziehen („nicht gut“). Darunter war ein Kind, das in Aufgabe 1 und 2 angab, das Malkreuz noch nicht gekannt und auch nach dem Unterrichtsverlauf nicht verstanden zu haben.

Die Versuche, die Rechenoperation „Wurzelziehen“ in eigenen Worten zu beschreiben, reichten von richtigen und falschen Aussagen über kreative Beispiele bis hin zur genauen Beschreibung des Vorgehens beim Ausfüllen des Malkreuzes, wie folgende Ausschnitte zeigen:

„*Beim Wurzelziehen hast du eine Zahl z.B. 196. Du zeichnest als erstes das Malkreuz. Dort schaust du, wie du die hunderter aufteilen. In dem Fall 10 · 10. Dann musst du dir eine N.R. schreiben: 196 – 100 = 96. Das Ergebnis wo du raus bekommen hast musst du wieder aufteilen.*“ oder „*Man bekommt [beim Wurzelziehen] eine Zahl, bei der man dann die Quadratwurzel herausfinden muss. (man muss bei der Zehnerzahl „schätzen“ was am nähesten dran ist und bei der einer Zahl es dann ausrechnen…)*“

Ein anderes Kind bemerkte lediglich: „*Das Wurzelziehen ist ein bisschen wie ein Ratespiel.*“, womit es wohl das Finden der Zehner- und Einerstelle im Malkreuz meinte. Oftmals wurde von Schülern die Beziehung zum Quadrieren angesprochen: „*Das Wurzelziehen ist das Gegenteil vom Quadrieren.*“ oder „*Das Wurzelziehen ist sozusagen die Umkehrrechnung vom Quadrieren.*“ „*Man bestimmt* [beim Wurzelziehen] *die Quadratzahl“* oder *„Man findet heraus wie die Quadratzahl lautet*“, sowie „*Das Wurzelziehen ist das Ergebnis einer quadrierten Zahl*“.

Wurzelziehen (zumindest aus 4stelligen Zahlen)kann also in der 5. Klasse thematisiert werden, ohne dass ein Taschenrechner zum Einsatz kommt. Es lässt sich auch bei Zahlen, die selbst keine Quadratzahlen sind, untersuchen, zwischen welchen Quadratzahlen sie liegen.