Petra Carina TEBAARTZ, Gießen

Aufgabentypen bei der Mathematik-Olympiade

Die Mathematik-Olympiade ist ein Stufenwettbewerb, den jährlich bundesweit über 200.000 mathematisch interessierte Schülerinnen und Schüler in den Klassenstufen drei bis dreizehn bestreiten. In meinem Dissertationsprojekt beschäftige ich mich mit der Analyse und Förderung der Beweiskompetenz von Teilnehmerinnen und Teilnehmern der Mathematik-Olympiade ab der fünften Klassenstufe. Da diese Zielgruppe bisher kaum erforscht ist, habe ich zunächst untersucht, welche Anforderungen zum Beweisen bei der Mathematik-Olympiade gestellt werden. Diese Untersuchung stelle ich in diesem Text vor. Im weiteren Verlauf des Dissertationsprojekts erfolgt eine Erhebung der vorhandenen Beweiskompetenz und der Schwierigkeiten der Lernenden. Aus diesen zwei Analysen werde ich anschließend Ansatzpunkte für eine Förderung von Wettbewerbsteilnehmenden ableiten.

Aufgabenanalyse

Die Anforderungen an das Wissen und Können zum Beweisen erfasse ich mittels einer Aufgabenanalyse. Der Fokus liegt dabei auf dem Bereich der Teilbarkeit ganzer Zahlen. Untersuchungsgegenstand sind alle Wettbewerbsaufgaben aus diesem Themenbereich, die in den letzten zehn Schuljahren gestellt wurden. Insgesamt handelt es sich um 199 Aufgaben, von denen insgesamt 352 Aufgabenteile relevant sind.[1] Jeden Aufgabenteil analysiere ich separat. Zusätzlich zu den Aufgabenstellungen berücksichtige ich hierbei die vom Aufgabenausschuss herausgegebenen Lösungen und Bewertungsvorgaben und orientiere daran die vom Lösungsweg abhängige Untersuchung der Anforderungsstrukturen.

Ziel ist es herauszufinden, welche Anforderungen zum Beweisen vom Aufgabenausschuss an die Wettbewerbsteilnehmenden gestellt werden. Dafür arbeite ich die verschiedenen Anforderungsbereiche der komplexen Aktivität des Beweisens heraus und betrachte diese isoliert. Für jeden Schwierigkeitsbereich definiere ich Anforderungsniveaus und codiere alle Aufgabenteile entsprechend. Auf dieser Basis werde ich in Einklang mit den Analyseergebnissen Aufgaben für eine Erhebung der Beweiskompetenz von Teilnehmenden der Mathematik-Olympiade, dem zweiten Teil des Dissertationsprojekts, entwickeln. Abbildung 1 zeigt einen Ausschnitt des Schemas der Aufgabenanalyse, in dem als erster Schritt die Aufgabentypen erfasst werden. Im Folgenden erläutere ich diesen Ausschnitt näher.

[1] Da die Aufgaben der Bundesrunde der 55. Mathematik-Olympiade 2015/16 erst ab Juni 2016 berücksichtigt werden können, wird sich die Anzahl an Aufgaben noch geringfügig erhöhen.

In Institut für Mathematik und Informatik Heidelberg (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2016* (S. x–y). Münster: WTM-Verlag

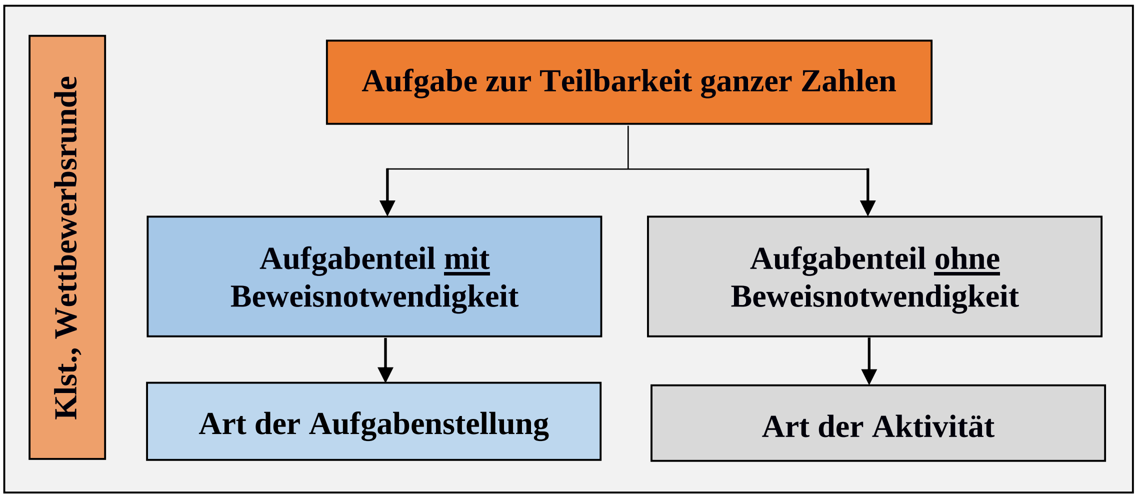

Abbildung 1: Ausschnitt des selbst entwickelten Schemas zur Aufgabenanalyse

Eine natürliche Zahl kann die Eigenschaft haben, dass sie durch ihre Quersumme teilbar ist. Ein Beispiel ist 12.

a) Gib zwei zweistellige natürliche Zahlen an, deren größter gemeinsamer Teiler 1 ist und die jeweils durch ihre Quersumme teilbar sind.

b) Untersuche, ob alle durch 9 teilbaren zweistelligen natürlichen Zahlen durch ihre Quersumme teilbar sind.

c) Begründe durch allgemeine Feststellungen, dass alle durch 10 teilbaren zweistelligen natürlichen Zahlen durch ihre Quersumme teilbar sind.

Abbildung 2: Aufgabe der 52. Mathematik-Olympiade, Klassenstufe 6, Landesrunde, 1. Aufgabe (Mathematik-Olympiaden e.V., 2013, S. 34f.)

Lisa geht in die 6. Klasse und wird zur Teilnahme an der 54. Mathematik-Olympiade eingeladen. Sie stellt fest, dass die Zahl 54 durch 6 teilbar ist, die Quersumme von 54 – das ist 9 – aber nicht.

a) Bestimme alle zweistelligen Zahlen, die durch 6 teilbar sind und deren Quersumme ebenfalls durch 6 teilbar ist.

Nun sucht sich Lisa Zahlen, die die Quersumme 54 haben.
Hinweis: Die Quersumme einer Zahl ist die Summe ihrer Ziffern.

b) Ermittle die kleinste derartige gerade Zahl.

[…]

Abbildung 3: Aufgabe der 54. Mathematik-Olympiade, Klassenstufe 6, Regionalrunde, 1. Aufgabe (Mathematik-Olympiaden e.V., 2015, S. 36)

Aufgabenteile mit/ohne Beweisnotwendigkeit

Bei der Analyse unterscheide ich zuerst zwischen Aufgabenteilen mit und solchen ohne Beweisnotwendigkeit. In Aufgaben ohne Beweisnotwendigkeit muss eine eigene Behauptung aufgestellt, eine vorgegebene Aussage geprüft, auf Beispiele angewendet oder eine Lösung angegeben werden. Zwar steht auf jedem Aufgabenblatt, dass der Lösungsweg korrekt und lückenlos darzustellen ist (z.B. Aufgabenausschuss des Mathematik-Olympiaden e.V., 2010), was aber noch nicht der Beweiskompetenz zugerechnet werden soll, da es nach den Lösungen des Aufgabenausschusses unter anderem ausreicht, in Aufgabenteil a) in Abbildung 2 ein passendes Zahlentupel, zum Beispiel (10, 21), als Lösung anzuführen, ohne alle gegebenen Bedingungen explizit nachzuprüfen. In Aufgabenteil b) hingegen ist die gegebene Aussage mit einem Gegenbeispiel zu widerlegen, in Aufgabenteil c) ist eine Wenn-Dann-Aussage zu beweisen. Diese Aufgabenteile mit Beweisnotwendigkeit analysiere ich in Bezug auf die Anforderungen an das Wissen und Können zum Beweisen genauer. Dabei stellt sich die Frage, inwiefern die zu zeigende Aussage von den Wettbewerbsteilnehmenden zunächst selbständig entdeckt werden muss.

Art der Aufgabenstellung

Zu Aufgabenteilen mit Beweisnotwendigkeit gehören entsprechend den Ausführungen von Stein (1984) zum einen solche, in denen wie in Aufgabenteil c) in Abbildung 2 eine vorgegebene Aussage zu beweisen ist. Diese werden vom Aufgabenausschuss des Mathematik-Olympiaden e.V. (2010) in Einklang mit der Aufgabentypologie von Bruder (2008) als „**Beweisaufgaben**“ bezeichnet.

Zum anderen gibt es Aufgaben, in denen ein gegebenes Problem selbständig zu lösen und die Richtigkeit der Lösung zu beweisen ist (Stein, 1984). Aufgabenteil b) in Abbildung 2 ist eine „**Untersuchungsaufgabe**“ (Aufgabenausschuss des Mathematik-Olympiaden e.V., 2011, S. 2). Bei diesem Aufgabentyp ist zu entscheiden, ob etwas existiert oder ob eine Aussage allgemeingültig ist, und anschließend die gegebene Aussage oder ihre Negation zu beweisen. Abbildung 3 zeigt „**Bestimmungsaufgaben**“ (Aufgabenausschuss des Mathematik-Olympiaden e.V., 2010, S. 2). Hier lassen sich zwei Arten unterscheiden. In Aufgabenteil b) muss weder die Existenz einer Lösung noch die Anzahl der möglichen Lösungen überprüft werden. In Aufgabenteil a) hingegen ist die Mächtigkeit der Lösungsmenge unbekannt. Entweder existiert keine Lösung oder es sind alle möglichen Lösungen zu finden. Die Korrektheit und die Vollständigkeit der Lösungsmenge sind nachzuweisen (a.a.O.).

Ergebnisse differenziert nach Klassengruppen

Abbildung 4 zeigt, dass in jeder Klassengruppe[2] die Aufgabenteile mit Beweisnotwendigkeit über 85% ausmachen. Zudem enthält jede (Gesamt-)Aufgabe einen Aufgabenteil mit Beweisnotwendigkeit. Die Fähigkeit, Beweise entwickeln und formulieren zu können, ist demnach in allen Klassengruppen von großer Bedeutung für einen Erfolg im Wettbewerb. Mit steigender Klassengruppe nehmen dabei Beweisaufgaben einen zunehmend großen Anteil an allen Aufgabenteilen ein (siehe Abbildung 4), jedoch nur teilweise signifikant. Daher erscheint es sehr wichtig, die genauen Anforderungen beim Beweisen auch inhaltlich zu verstehen, um dann gezielt fördern zu können.

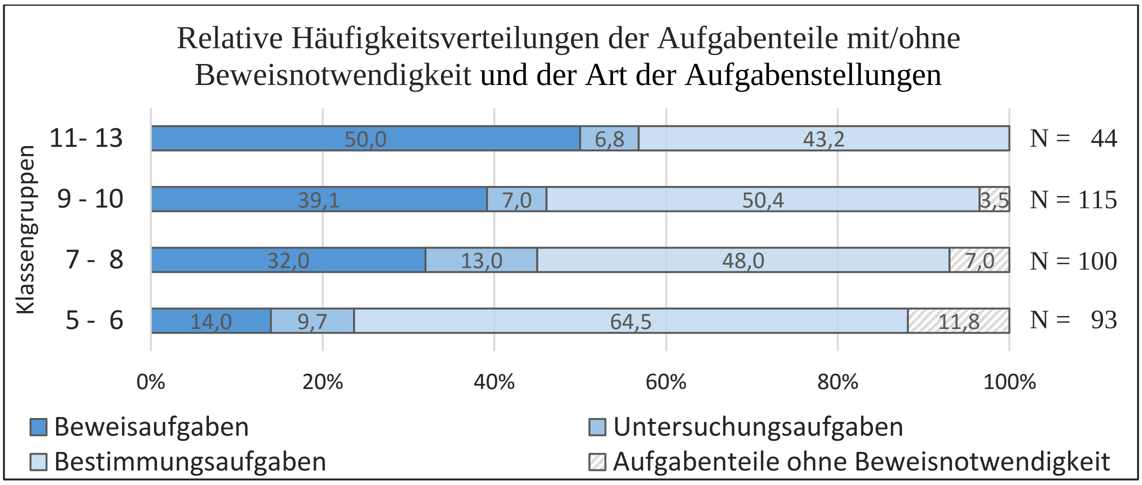

Abbildung 4: Ergebnisse differenziert nach Klassenstufen

Literatur

Aufgabenausschuss des Mathematik-Olympiaden e.V. (Hrsg.) (2010). *50. Mathematik-Olympiade, 1. Stufe (Schulrunde), Klasse 7, Aufgaben*. Verfügbar unter http://www.mathematik-olympiaden.de/aufgaben/50/1/A50071.pdf [17.03.2016].

Aufgabenausschuss des Mathematik-Olympiaden e.V. (Hrsg.) (2011). *51. Mathematik-Olympiade, 1. Stufe (Schulrunde), Klasse 7, Aufgaben*. Verfügbar unter http://www.mathematik-olympiaden.de/aufgaben/51/1/A51071.pdf [17.03.2016].

Bruder, R. (2008). Vielseitig mit Aufgaben arbeiten. In R. Bruder, T. Leuders & A. Büchter (Hrsg.), *Mathematikunterricht entwickeln* (S. 18–52). Berlin: Cornelsen Scriptor.

Mathematik-Olympiaden e.V. (Hrsg.) (2013). *Die 52. Mathematik-Olympiade 2012/2013. Aufgaben und Lösungen.* Hamburg: Hereus.

Mathematik-Olympiaden e.V. (Hrsg.) (2015). *Die 54. Mathematik-Olympiade 2014/2015. Aufgaben und Lösungen.* Hamburg: Hereus.

Stein, M. (1984). *Beweisen*. Bad Salzdetfurth: Franzbecker.

[2] Die Einteilung in Klassengruppen entspricht der Struktur des Aufgabenausschusses und trägt der Tatsache Rechnung, dass in einigen Wettbewerbsrunden in verschiedenen Klassenstufen (z.B. Klst. 11-13) dieselben Aufgaben gestellt werden.