Johannes BLAUERT, Hinrich LORENZEN, Flensburg

Analytische Geometrie – schlicht und natürlich

Die analytische Geometrie bereitet Lernenden besonders auf der Begriffsebene große Probleme. In diesem Beitrag soll ein alternativer Aufbau der analytischen Geometrie für den Schulunterricht vorgestellt werden, dessen Einsatz im Rahmen erster Interventionsstudien an Schulen in Schleswig-Holstein zu erfolgversprechenden Ergebnissen hinsichtlich des verständnisorientierten Lernzuwachses führte. Als Grundobjekte der Theorie dienen in diesem Ansatz Punkte, um auf die für Schüler sprachlich komplizierten Begriffe Vektor, Ortsvektor, Stützvektor, Richtungsvektor usw. zu verzichten und das Pfeilklassenmodell zu umgehen.

1. Zum Vektorbegriff

In der Schulmathematik werden Vektoren als Äquivalenzklassen von Pfeilen $\vec{v} = \{v' \mid v' \, ist\ parallelgleich\ zu\ v\}$ vermöge der Äquivalenzrelation „parallelgleich“ oder als Verschiebungen definiert. Ein Pfeil v ist dabei eine gerichtete Strecke pq mit Anfangspunkt p und Endpunkt q. Zwei Pfeile $v = pq$ und $v' = p'q'$ heißen parallelgleich, wenn sie die gleiche Länge haben, parallel zueinander und gleich orientiert sind. v heißt Repräsentant des Vektors $\vec{v}$. Die Addition und Vervielfachung von Vektoren wird repräsentantenabhängig definiert, im Anschluss ist die Repräsentantenunabhängigkeit zu zeigen.

Aus der Perspektive der Hochschulmathematik betrachtet, sind Vektoren v Elemente der Trägermenge V eines K-Vektorraumes $(V, +, \cdot)$, wobei K ein Körper, $(V, +)$ eine abelsche Gruppe und $\cdot$ eine Verknüpfung zwischen K und V ist, so dass für alle $c, c' \in K$ und alle $v, v' \in V$ die Aussagen

- $c \cdot v \in V$
- $(c + c') \cdot v = c \cdot c + c' \cdot V$
- $(cc') \cdot v = c \cdot (c' \cdot v)$
- $c \cdot (v + v') = c \cdot v + c \cdot v'$
- $1_K \cdot v = v$

erfüllt sind. Die zentrale Erkenntnis, dass jeder n-dimensionale $\mathbb{R}$-Vektorraum isomorph zum $\mathbb{R}^n$ ist, macht die abstrakte Vektorraumtheorie für die Schulmathematik zugänglich.

Descartes (1637) führt Koordinaten als Bijektion zwischen der Punktmenge der Zeichenebene und dem $\mathbb{R}^2$ ein, Objekte der Ebene werden damit zu

Punktmengen, die durch algebraische Bedingungen an ihre Koordinaten gegeben sind. Beschreiten wir den umgekehrten Weg und konstituieren die Ebene erst durch Angabe der Koordinaten, so können wir sagen, dass die Zeichenebene der $\mathbb{R}^2$ ist. Punkte sind damit Elemente des $\mathbb{R}^2$ und, da der $\mathbb{R}^2$ ein $\mathbb{R}$-Vektorraum ist, sind Punkte Vektoren.

2. Algebraisierung der Zeichenebene

Die in der Schulmathematik verbreitetste Reihenfolge der Zahlbereichserweiterungen $\mathbb{N}_0 \to \mathbb{Q}^+ \to \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ wird häufig am Zahlenstrahl veranschaulicht (vgl. *Padberg (1995)*) und geht mit einer Erweiterung der Zeichenebene einher, so dass die vollständige Zeichenebene $\mathbb{R}^2$ den Schülern auf natürliche Weise bekannt ist. Um die Zeichenebene im Sinne von Descartes zu algebraisieren greifen wir den Vorschlag von *Dieudonné (1966)* auf und wählen die Vektorraumstruktur des $\mathbb{R}^2$ als algebraische Struktur. Gemäß der Skizze eines darauf aufbauend gestalteten Unterrichtsganges in *Lorenzen (2002)* wählen wir Punkte $A = \binom{a_1}{a_2}$ als grundlegende Objekte.

Da die Zeichenebene den Zahlenstrahl auf kanonische Weise enthält, ist die zunächst rein algebraisch eingeführte koordinatenweise Addition von Punkten nach dem Permanenzprinzip die für Schüler natürliche Erweiterung der Addition reeller Zahlen zur Addition von Punkten. Die Multiplikation von Punkten mit reellen Zahlen bezeichnen wir bewusst als Vervielfachung, um eine begriffliche Trennung von Skalarmultiplikation und Skalarprodukt zu gewährleisten. Durch wiederholte Addition ergibt sich sofort $n \cdot A = \binom{na_1}{na_2}$ für natürliche Zahlen n und damit auch für reelle Zahlen r. Eine komponentenweise Multiplikation von Punkten verletzt die Nullteilerfreiheit und die Kürzungsregel und kann somit mit dem Permanenzprinzip ausgeschlossen werden.

3. Geometrische Interpretation der Addition und Vervielfachung

Der Strahlensatz liefert die Begründung für die geometrische Interpretation der Vervielfachung von Punkten. Diese ist damit urprungsabhängig, aber koordinatenfrei möglich. Durch die Projektion auf die Koordinatenachsen wird ersichtlich, dass $\frac{1}{2} \cdot (A + B)$ der Mittelpunkt M_{AB} der Strecke AB ist. Greifen wir auf die aus der Mittelstufe bekannte Tatsache zurück, dass ein Viereck genau dann ein Parallelogramm ist, wenn die Diagonalen einen gemeinsamen Mittelpunkt besitzen, so liefert dies eine Begründung für die geometrische Interpretation der Addition: $A + B$ ist der Punkt, so dass das Viereck $OA(A + B)B$ ein Parallelogramm ist.

Erneut liefert die Mittelpunktsregel die Begründung dafür, dass es sich bei dem Viereck $AB(A+X)(B+X)$ um ein Parallelogramm handelt – durch Addition eines Punktes X zu den Endpunkten einer Strecke AB erhalten wir also eine parallel verschobene Strecke. Diese Verschiebung kann durch Pfeile kenntlich gemacht werden. Diese Pfeile stellen kein neues mathematisches Objekt für die Schüler dar, denn es werden lediglich Punkte addiert, wodurch wie in *Malle (2005)* auf den Begriff des Ortsvektors verzichtet werden kann.

Mit diesen wenigen Grundbegriffen sind wir in der Lage, eine große Breite an geometrischen Fragestellungen zu bearbeiten. Punktspiegelungen können auf Mittelpunktsberechnungen zurückgeführt werden, womit die Notwendigkeit der Untersuchung der Rechenregeln für die neuen Verknüpfungen motiviert und – vom höheren Standpunkt aus betrachtet – der $\mathbb{R}^2$ als Vektorraum erkannt wird, ohne dass dieser Begriff an dieser Stelle Verwendung findet. Auch die Berechnung des 2:1-Teilungspunktes T einer Strecke AB kann auf Mittelpunktsberechnungen und Spiegelpunktsberechnungen zurückgeführt werden und führt zu $T=\frac{1}{3}\cdot A+\frac{2}{3}\cdot B$.

Der Beweis des Satzes, dass sich die Seitenhalbierenden eines Dreiecks ABC in ihrem gemeinsamen 2:1-Teilungspunkt schneiden, ist nun durch kurze Verifikation der Aussagen

$\frac{1}{3}\cdot A+\frac{2}{3}\cdot M_{BC}=\ \frac{1}{3}\cdot B+\frac{2}{3}\cdot M_{AC}=\ \frac{1}{3}\cdot C+\frac{2}{3}\cdot M_{AB}=\frac{1}{3}(A+B+C)$=:S

möglich.

4. Geraden und euklidische Geometrie

Ursprungsgeraden werden als Punktmengen $\mathbb{R}\cdot A:=\{X|\exists r\in\mathbb{R}:X=r\cdot A\}$, Geraden als verschobene Ursprungsgeraden $\mathbb{R}\cdot A+B$ eingeführt. Zwei Geraden heißen parallel zueinander, wenn sie aus der gleichen Ursprungsgeraden hervorgegangen sind. Der Nachweis, dass $\mathbb{R}\cdot(A-B)+B$ eine Gerade durch die Punkte A und B darstellt, erfolgt rein arithmetisch. Auch die Einführung des Punktproduktes $A\circ B\coloneqq a_1b_1+a_2+b_2$ erfolgt rein arithmetisch und mit der Abkürzung $A^2\coloneqq A\circ A$ behalten die binomischen Formeln ihre Gültigkeit.

Bezeichnen wir mit $||A||$ den Abstand des Punktes A vom Koordinatenursprung O, so liefert der Satz des Pythagoras $||A||=\sqrt{A^2}$. Wenden wir die Verschiebungsregel an, so erhalten wir für die Länge der Strecke AB die Identität $|AB|=||A-B||$. Zwei Geraden $g=\mathbb{R}\cdot A+B$ und $g'=\mathbb{R}\cdot A'+B'$ heißen orthogonal zueinander, wenn ihre Richtungen $\mathbb{R}\cdot A$ und

$\mathbb{R} \cdot A'$ orthogonal zueinander sind, das Dreieck $AA'O$ also rechtwinklig ist. Dies ist genau dann der Fall, wenn $A \circ A' = 0$ ist.

Führen wir $A^{\perp} \coloneqq \begin{pmatrix} -a_2 \\ a_1 \end{pmatrix}$ ein, so erhalten wir, dass $m_{AB} \coloneqq \mathbb{R} \cdot (A - B)^{\perp} + \frac{1}{2} \cdot (A + B)$ das Mittellot der Strecke AB bildet. Mit dem Mittellotprinzip steht uns nun ein leistungsfähiges Werkszeug zur Verfügung, mit dem sich auch ohne koordinatenbasierte Berechnungen eine Vielzahl elementargeometrischer Fragestellungen untersuchen lässt. So erfolgen Abstandsberechnungen eines Punktes P von einer Geraden $\mathbb{R} \cdot A + B$ mithilfe des Lotes $\mathbb{R} \cdot A^{\perp} + P$. Im Anschluss erfolgt die Übertragung und Erweiterung der entwickelten Konzepte auf den $\mathbb{R}^3$.

5. Fazit

In der Schulmathematik wird der $\mathbb{R}^n$ üblicherweise als Menge der Pfeilklassen/Verschiebungen, Lösungen linearer Gleichungssysteme und Stücklisten in Produktionsprozessen interpretiert. Die Interpretation als Punktraum stellt eine weitere Alternative zu den gängigen Interpretationen des $\mathbb{R}^n$ dar, durch die den Schülern mit einem minimalen begrifflichen Aufwand bereits nach kurzer Unterrichtszeit ein breites Spektrum an geometrischen Fragestellungen zugänglich gemacht werden kann. Dieses Konzept wird im Rahmen einer Dissertation weiterentwickelt und im Rahmen von Interventionsstudien qualitativ erforscht. Letztendlich sollte ein Unterrichtsgang sich nicht nur auf eine Interpretation beschränken, sondern den Schülern mehrere Zugänge zu ein und demselben mathematischen Objekt bieten.

Literatur

Descartes, R. (1637). Discours de la méthode pour bien conduire sa raison et chercher la vérité dans les sciences.

Dieudonné, J. (1966). Winkel, Trigonometrie, komplexe Zahlen. *Der Mathematikunterricht MU, 12(1),* 5–16.

Lorenzen, H. (2002). Zur Diskussion gestellt: Analytische Geometrie – schlicht und natürlich. *Der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht, 55*, 231–233.

Malle, G. (2005). Von Koordinaten zu Vektoren. *Mathematik Lehren, 133,* 4–7.

Stein, M., Padberg, F., Dankwerts, R. (1995). Zahlbereiche. *Spektrum Akademischer Verlag*.