Claudia BÖTTINGER, Duisburg-Essen

Lineare Algebra für das Lehramt Grund-/ Haupt-/ Realschule

Die Veranstaltung „Lineare Algebra“, aus der einige Elemente der Neukonzeption hier vorgestellt werden, richtet sich an Studierende des Lehramts Grundschule (Master) sowie Studierenden des Lehramts Haupt-/ Realschule (Bachelor oder Master) der Universität Duisburg-Essen. Trotz vieler Anstrengungen fehlt speziell den Studierenden mit Studienziel Lehramt Grundschule in Fachveranstaltungen Mathematik die Beziehung zu ihrer späteren Tätigkeit als Lehrkraft. Darüber hinaus stehen derartige Veranstaltungen machmal isoliert im Studium; Verbindungen zu vorangehenden Veranstaltungen erfolgen eher unsystematisch. Beide Probleme werden in dem als eher abstrakt geltenden Fach Lineare Algebra angegangen.

Folgt man dem Modell von Beutelspacher, Danckwerts et al. (2011), so beruht die Ausbildung auf vier Säulen, von denen zwei an dieser Stelle besonders herausgestellt werden sollen:

1. Erfahrungen mit einer „Schulmathematik vom höheren Standpunkt“. Dabei dürfen schulrelevante Beispiele nicht nur „*beispielhafte Konkretisierungen des allgemeinallgemeinen Falls sein […] sondern müssen ihrerseits vertieft betrachtet werden*“ (Schwarz, Herrmann 2015)

2. Aktive Beziehung zur Mathematik als Wissenschaft und als Kulturgut. „*Studierende müssen ein differenziertes Bewusstsein entwickeln können über die Art des gedanklichen Zugriffs, den die Mathematik vornimmt*.“ (Empfehlungen, 2008)

Im Folgenden wird dargestellt, auf welche Weise es möglich ist, produktive Übungen zu nutzen, um bei den Themen Lineare Gleichungssysteme und Vektorräume einen deutlichen Bezug zur Grundschulmathematik herzustellen und durch Nutzung grundlegender Begriffe und Ideen der linearen Algebra vertiefte Einsichten in die Struktur dieser Übungen zu gewinnen.

1. Lineare Gleichungssysteme (LGS)

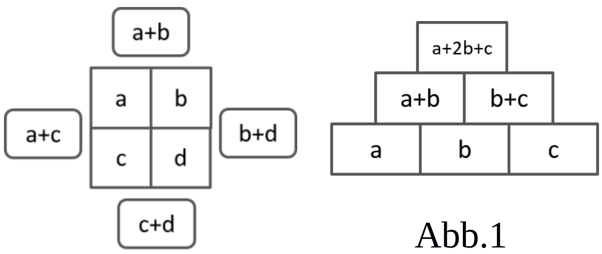

Abb.1

Als typische Anwendungen linearer Gleichungssysteme bieten sich produktive Übungen an, bei denen man zwei Typen unterscheiden muss.

Beim 1. Typ ergeben sich einzelne vorgegebene Felder durch Bildung von Linearkombinationen aus Variablen. Dazu gehören Rechendreiecke und –vierecke, Zahlenmauern, Rechen-

In Institut für Mathematik und Informatik Heidelberg (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2016* (S. x–y). Münster: WTM-Verlag

ketten oder Additionstabellen/Streichquadrate, vgl. Abb. 1. Lineare Gleichungssysteme erhält man, indem man für die Felder mit Linearkombinationen Zahlen vorgibt und fordert, dass beliebige reelle Zahlen als Einträge zulässig sind. Beim Rechenviereck wie in Abb. 1 könnte dies etwa a+b=10, b+d=20, c+d=15, a+c=5 sein.

Beim folgenden 2. Typ sind die LGS explizit gegeben, etwa Zauberbuchstaben wie in Abb. 2 (Käpnick, 2001), Magische Quadraten oder Zauberspinnen (Floer, Schipper, 1992). Gefordert ist in diesem Beispiel a+b+c=b+d+e. Ist diese Zielsumme vorgegeben, erhält man in der Regel ein inhomogenes LGS, sonst ein homogenes. Auch hier muss gefordert werden, dass alle reellen Zahlen (auch gleiche) als Einträge zulässig sind, im Gegensatz zu dem Original für die Schule.

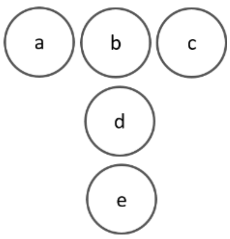

Abb. 2

Worin liegt nun der Nutzen dieser Behandlung produktiver Übungen für die Studierenden? Die Betrachtung als LGS ermöglicht einen Wechsel von eher probierenden, aufgabenbezogenen Lösungsstrategien wie sie grundschultypisch sind hin zu universellen, für viele Situationen einsetzbaren Strategien. Man erhält allgemeine Begründungen für die (Nicht-)Lösbarkeit von LGS und die erhaltenen Lösungen sind vollständig. Darüber hinaus ist es möglich, selbst produktive Übungen dieser Art zu erfinden.

2. Vektorräume

Neben dem R^2, R^3 und dem R^n dienen die oben angeführten produktiven Übungen ebenfalls als zentrale Beispiele für Vektorräume. Die Objekte werden addiert, indem man Felder gleicher Lage addiert und sie werden mit einem Skalar multipliziert, indem man alle Einträge mit dem Skaler multipliziert. Man erhält ein Objekt, das wieder dieselbe Struktur besitzt (beweispflichtig!).

Zu unterscheiden sind wieder die oben erwähnten beiden Typen. Das folgende Beispiel (Typ 1) in Abb. 3 ist einer Aufgabe aus dem Zahlenbuch Kl. 3 (Wittmann, Müller 2005) nachempfunden und soll verdeutlichen, dass diese Sichtweise in angepasster Weise in der Grundschule thematisiert werden kann. Rechne und vergleiche:

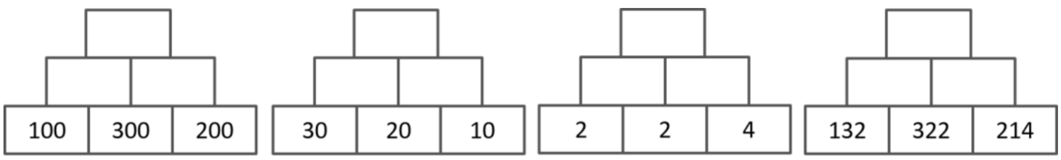

Abb. 3

Der Nutzen dieser Sichtweise, produktive Übungen vom Typ 1 als Vektorräume aufzufassen, liegt z. B. darin, dass sich unterschiedliche Strukturen charakterisieren lassen. Vergrößert man etwa Zahlenmauern um eine Zeile, vergrößert sich die Dimension des entstehenden Vektorraums um 1. Bei Zahlenketten wie in Abb. 4 führt eine Verlängerung der Ketten nicht zu einer Vergrößerung der Dimension, sie bleibt 2. Damit sind die Übungen strukturell verschieden.

Abb. 4

Streichquadrate liefern ein Beispiel dafür, dass die Bestimmung der Basis keinesfalls immer so offensichtlich wie bei Zahlenmauern (Abb. 1) oder Rechenketten (Abb. 4) ist.

Die wichtigste und ungewohnteste Bedeutung liegt in einer neuen Sicht auf das operative Prinzip. Folgt man der Version Wittmanns (1985), so ist es bei der Untersuchung mathematischer Objekte erforderlich, zu „*untersuchen, welche Operationen ausführbar und wie sie miteinander verknüpft sind*“ noch bevor beobachtet werden kann, welche Wirkungen Operationen auf Eigenschaften und Beziehungen der Objekte haben. Die in Didaktik-Veranstaltungen immer wieder betrachtete Veränderung von Basissteinen etwa bei Zahlenmauern steht in enger Verbindung zur Linearität.

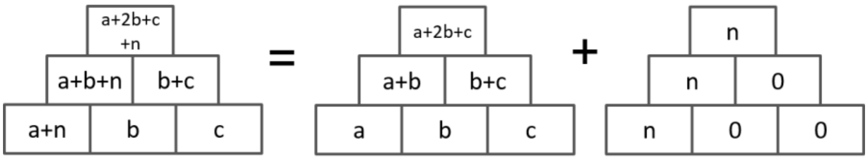

Abb. 5

Wie in Abb. 5 zu sehen ist, bedeutet die Erhöhung eines Basissteins um die Zahl n aus Sicht der linearen Algebra die Addition eines Vektors. Daher handelt es sich hierbei um eine strukturell nahe liegende Operation. Im Kontrast dazu führt die Erhöhung von ausgezeichneten Zahlen etwa bei Mal-Plus-Häusern oder bei multiplikativen Zahlenmauern nicht zu einer Addition von Vektoren sondern zu komplexeren Veränderungen innerhalb der Bausteine.

Betrachtet man den 2. Typ produktiver Übungen, bei denen die Gleichungssysteme explizit gegeben sind, so stellen diese ebenfalls Vektorräume dar. Bei dieser Sichtweise ist es möglich, durch die Bildung von Linearkombinationen neue Lösungen aus bekannten zu erzeugen. Insbesondere bieten sie sich an, durch die Bestimmung der Basis Beziehungen zwischen den beiden Typen von Übungen zu thematisieren. Schließlich ist beim 2. Typ das LGS gegeben, beim 1. Typ ist die Lösung gegeben.

3. Fazit

Die Studierenden haben die Bemühungen um die Einbindung des Schulbezugs angenommen, wie der Ausschnitt aus der Evaluation belegt (Abb. 6).

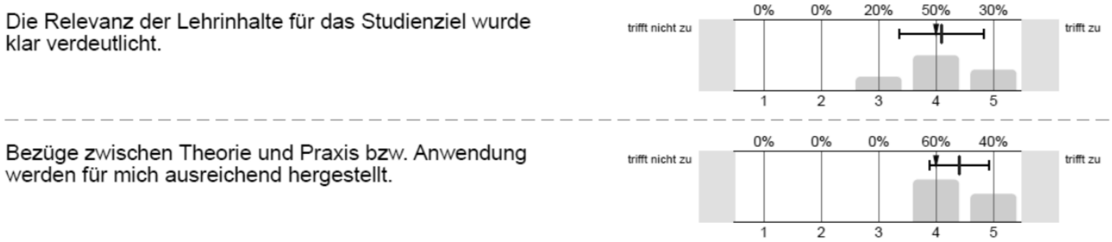

Abb. 6

Unerwartet war, dass Studierende mit Studienziel Lehramt Haupt-/ Realschule berichteten, dass sie neue Übungsformate kennen lernen durften, die sie für sich als nützlich für die spätere Tätigkeit gesehen haben.

Das vorgestellte Konzept stößt jedoch an Grenzen, wie Abb. 7 zeigt.

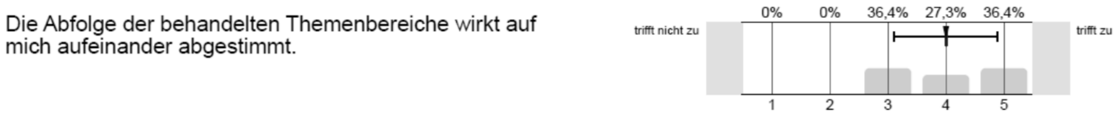

Abb. 7

Möglicherweise leidet der „rote Faden“ der Veranstaltung, weil sich das Konzept der produktiven Übungen bei linearen Abbildungen nicht sinnvoll weiter führen lässt. Lineare Abbildungen zwischen verschiedenen produktiven Übungen sind aus momentaner Sicht nicht hilfreich, um ihre Struktur besser zu verstehen. Aus mathematischer Sicht muss abschließend erwähnt werden, dass die Veränderung der zulässigen Zahlbereiche im Vergleich zu den Aufgaben für die (Grund-)Schule die Struktur der Übungen verändert.

Literatur

Beutelspacher, A., Danckwerts, R. et al. (2011). *Mathematik neu denken, Impulse für die Gymnasiallehrerbildung an Universitäten*, Vieweg+Teubner, Wiesbaden

Empfehlungen von DMV, GDM, MNU (2008). *Standards für die Lehrerbildung im Fach Mathematik,* http://madipedia.de/images/2/21/ Standards_Lehrerbildung_ Mathematik.pdf [1.3.2016]

Floer, J., Schipper, W. (1992) Zauberquadrate und Zahlenspinnen, Weitere Beispiele für entdeckendes Üben, Kl.2-4, *Die Grundschulzeitschrift*, 51, 59-67

Schwarz, B., Herrmann, P. (2015) Bezüge zwischen Schulmathematik und Linearer Algebra, *Math. Semesterberichte* 62 (2), 195-217

Wittmann, E. Ch. (1985). Objekte – Operationen – Wirkungen: Das operative Prinzip in der Mathematikdidaktik, *Mathematik lehren* 11, 7-11

Wittmann, E. Ch., Müller, N. (2005) *Das Zahlenbuch Klasse 3*, Ernst Klett Grundschulverlag, Leipzig