Matthias BÖRRNERT, Ulrich KORTENKAMP, Potsdam

Zum dezimalen Stellenwertverständnis von Schülerinnen und Schülern der Klassenstufe 7

Im Rahmen einer Interviewstudie machten Schüler der Klassenstufe 7 zweier Potsdamer Gymnasien folgende Aussagen:

„Ich würde vermuten, dass Hundertstel größer sind als Zehntel, weil ja Hundert mehr ist als Zehn."

„Also die 2 Zehntel sind 0,2. Und wenn man die 4 Hundertstel umrechnet, sind das 40 Zehntel […] und dann kämen 4,2 raus."

Die Äußerungen offenbaren, wie schwer es Kindern fallen kann, ein Verständnis von Stellenwerten bei Dezimalbrüchen zu entwickeln. Es ist allgemein bekannt, dass Schülerinnen und Schüler bei der Einführung der Dezimalbrüche auf Verständnishürden stoßen, selbst wenn sie in der Grundschule erfolgreich in Mathematik waren. Diese Hürden genauer zu identifizieren, ihre Ursachen zu verstehen und nach Ansatzpunkten zum konstruktiven Aufbau adäquater Grundvorstellungen des dezimalen Stellenwertsystems zu suchen, war die Motivation für die vorliegende qualitative Studie.

1. Grundverständnis dezimaler Stellenwerte

Den Dezimalbrüchen liegen die gleichen vier Prinzipien des dezimalen Stellenwertsystems (Ross 1989) zu Grunde wie den natürlichen Zahlen. Es handelt sich um das Stellenwertprinzip (1): Die Position/Stelle einer Ziffer bestimmt ihren Wert; dem Basis-10-Prinzip (2): Der Wert jeder Stelle steigt um Faktor 10 von rechts nach links. Dieses Prinzip entspricht dem Bündelungsprinzip – oder genauer: der fortgesetzten Bündelung mit Basis 10. Es werden immer 10 Elemente einer Einheit 10^i zu einem Element der nächsthöheren Einheit 10^{i+1} zusammengefasst (vgl. Sprenger & Hußmann 2014). Da jede Ziffer die Anzahl der Elemente einer Einheit 10^i-Bündel angibt, ergibt sich ihr Zahlenwert nach dem multiplikativen Prinzip (3) aus Ziffer multipliziert mit ihrem Stellenwert. Der Gesamtwert der Zahl ist schließlich nach dem additiven Prinzip (4) die Summe der Zahlenwerte aller Ziffern. Dieses letzte Prinzip kommt dem dezimalen Teil-Ganze-Konzept nahe, ist ihm aber nicht gleichzusetzen.

Ein gut ausgeprägtes dezimales Teil-Ganze-Konzept ist notwendige jedoch nicht hinreichende Voraussetzung für ein flexibles Stellenwertverständnis – der Fähigkeit, flexibel zwischen Standard-Teilung und nicht-Standard-Teilungen einer Zahl wechseln zu können (Ladel & Kortenkamp 2014). Gerade die nicht-Standard-Teilungen einer Zahl sind für flexible Arithmetik sehr

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.): *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014*. WTM-Verlag, Münster, 2014, S. x-y

nützlich. Anhand einer Divisionsaufgabe sei dies exemplarisch demonstriert: 702,163 geteilt durch 7 scheint auf den ersten Blick nicht einfach und schnell im Kopf lösbar zu sein. Mit der nicht-Standard-Teilung 7H 21z 63t lässt sich das Ergebnis leicht finden.

2. Aktueller Forschungsstand

Im Vergleich zu den zahlreichen Forschungsbefunden im Bereich der gemeinen Brüche, sind Schülervorstellungen in der Dezimalbruchrechnung wenig erforscht, obwohl die vorhandenen Studien teils gravierende Defizite im Schülerverständnis aufgedeckt haben (vgl. Heckmann 2006). Erwiesenermaßen übersteigt der Umfang an Lernschwierigkeiten bei den Dezimalbrüchen in wesentlichen Bereichen deutlich die ohnehin schon großen Schwierigkeiten im Bereich der gemeinen Brüche (Padberg 1991).

Beiträge zur Erforschung des Schülerverständnisses von Dezimalbrüchen leisteten u. a. Padberg (1991), Resnick et al. (1989), Steinle & Stacey (2004), sowie Heckmann (2006). Unter den verschiedenen Teilbereichen der Dezimalbruchrechnung sind einige besser und andere nur spärlich erforscht. Zu letzteren Gebieten zählt auch das Stellenwertverständnis (vgl. Heckmann 2006). Zwar lieferten die oben benannten Studien sozusagen nebenbei auch Erkenntnisse zu diesem Bereich, aber explizit auf das Stellenwertverständnis bei Dezimalbrüchen ausgerichtete Forschung, wie beispielsweise die von Neumann (1997) zum dezimalen Stellenwertaufbau, ist selten.

In jüngster Zeit wurde von Ladel & Kortenkamp (2014) das flexible Stellenwertverständnis bei natürlichen Zahlen untersucht. Dabei wurde auch eine digitale Stellenwerttafel eingesetzt. Diese sogenannte Stellenwert-App ermöglicht den Lernenden ein interaktives Kennenlernen desdezimalen Stellenwertsystems (vgl. Ladel & Kortenkamp 2014). Diese App wurde nun in der hier vorgestellten Studie dazu eingesetzt, das flexible Stellenwertverständnis bei Dezimalbrüchen zu untersuchen.

3. Forschungsfragen und Forschungsdesign

Das Ziel der Untersuchung war, die Ausprägung des flexiblen Stellenwertverständnisses von Dezimalbrüchen bei Gymnasial- und Gesamtschülern der Klassenstufe 7 zu untersuchen. Gleichzeitig sollte in diesem Zusammenhang ergründet werden, wie die Schülerinnen und Schüler mit der Stellenwerttafel und der Stellenwert-App umgehen. Daraus ließen sich drei Hauptforschungsfragen ableiten: (F1) Wie ausgeprägt ist das Stellenwertverständnis der Schülerinnen und Schüler? (F2) Können die Schülerinnen und Schüler verschiedene (nicht-Standard)-Teilungen eines Dezimalbruchs finden?

(F3) Wie gehen die Schülerinnen und Schüler mit der herkömmlichen und der digitalen Stellenwerttafel um?

Zur Beantwortung dieser Fragen wurden zehn Testitems entwickelt, welche in videoaufgezeichneten Einzelinterviews von 13 Potsdamer Schülerinnen und Schülern bearbeitet wurden. Die Lösungen sollten auch auf dem Testbogen schriftlich notiert bzw. mit Stellenwerttafeln oder der Stellenwert-App dargestellt werden. Um einen möglichst direkten Einblick in die Denkprozesse der Probanden zu gewinnen, wurde die aus der Kognitionspsychologie stammende Methode des „lauten Denkens“ verwendet.

4. Ergebnisse

Anhand der verbalisierten Gedanken beim Lösen der Items konnten bereits bekannte Fehlvorstellungen wie z. B. die Komma-trennt-Vorstellung und die Komma-als-Symmetrieachse-Vorstellung repliziert werden. Darüber hinaus konnte in sechs Fehlerkategorien beim Vergleichen dezimaler Stellenwerte unterschieden werden: (V1) Es wird *nicht gebündelt*: Es findet kein Übertrag auf die nächst höhere Stelle statt, sondern die Ziffern werden zusammen als Block an die jeweilige Stelle geschrieben, z. B. 15h = 0,015 oder 13z = 0,13. (V2) *Stellenwertvergleichsfehler*: Der Wert der Bündelungseinheiten wird verwechselt, z. B. 2E 1h > 2E 1z, weil 1h > 1z. (V3) Es wird *nur die größte Bündelungseinheit betrachtet*. Kleinere Stellenwerte werden ignoriert, z. B. 5z 3h > 4z 15h, weil 5z > 4z. (V4) *Stellenwertübersetzungsfehler*: Bündelungseinheiten werden falsch in Dezimalbrüche übersetzt, wobei sich die fehlerhafte Antwort um eine (beliebige) Zehnerpotenz von der richtigen Antwort unterscheidet, z.B. 1z = 0,01 oder 15h = 1,5. (V5) *andere Übersetzungsfehler*: Bündelungseinheiten werden mit falschen Strategien in Dezimalbrüche übersetzt, z. B. 4z = 0,25 oder 2E = 0,5. Grund hierfür könnte ein fehlerhafter Vorstellungstransfer aus dem Bereich der gemeinen Brüche sein. Kategorie (V6) beinhaltet schließlich alle anderen nicht kategorisierbaren Fehler.

In den Items zum Umgang mit den Stellenwerttafeln sollten Dezimalzahlen einerseits mit Legeplättchen in der herkömmlichen Stellenwerttafel gelegt und andererseits mit der Stellenwert-App dargestellt werden. Bei den Antworten konnte in fünf Kategorien unterschieden werden: (SW1) *flexible Antwort*: Es wurden die Standard-Teilung sowie (verschiedene) strenge und nicht-strenge Teilungsdarstellungen gefunden. (SW2) *eingeschränkt flexible Antwort*: Es wurden die Standard-Teilung und (verschiedene) strenge nicht-Standard-Teilungen gefunden. (SW3) *nur eine Repräsentation*: Es wurde nur die Standard-Teilung gefunden. (SW4) *Antwort mit Fehlern*: Es wurde die Standard-Teilung gefunden und bei (mindestens) einer anderen Darstellung ein Fehler gemacht, sodass sich der Wert der Zahl änderte. (SW5) *andere Symbole*: Die Plättchen wurden umgedreht, sodass sich ihre Farbe zwischen rot und blau änderte. Es ist zu bemerken, dass die beiden letzten Kategorien beim Einsatz der Stellenwert-App ausgeschlossen sind. Mit der App bleibt Zahlenwert beim Verschieben der Plättchen invariant. Die Ergebnisse zeigten, dass mit der Stellenwert-App in vergleichbaren Aufgabenformaten mehr *flexible Antworten* gegeben wurden.

5. Ausblick

Im Kooperationsprojekt *Deciplace* mit der Universität des Saarlandes (S. Ladel) und der Universität Bremen (A. Bikner-Ahsbahs, D. Behrens) wird die virtuelle Stellenwerttafel hinsichtlich Ihrer Unterstützungsmöglichkeiten beim Stellenwertverständnis von Dezimalbrüchen weiter untersucht.

Literatur

Heckmann, K. (2006): *Zum Dezimalbruchverständnis von Schülerinnen und Schülern. Theoretische Analyse und empirische Befunde*. Dissertation. Berlin: Logos-Verlag.

Ladel, S. & Kortenkamp, U. (2014): Tätigkeitsorientiert zu einem flexiblen Verständnis von Stellenwerten. Ein Ansatz aus Sicht der Artefact-Centric Activity Theory. In: S. Ladel & C. Schreiber (Hrsg.): *Von Audiopodcast bis Zahlensinn. Lernen, Lehren und Forschen mit digitalen Medien in der Primarstufe*. Münster: WTM-Verlag, 151-175.

Neumann, R. (1997): Probleme von Gesamtschülern mit dem dezimalen Stellenwertaufbau. Ergebnisse einer empirischen Untersuchung. In: *Mathematische Unterrichtspraxis* 18 (3), 38-46.

Padberg, F. (1991): Problembereiche bei der Behandlung von Dezimalbrüchen - eine empirische Unter-suchung an Gymnasialschülern. In: *Der Mathematikunterricht* 37 (2), 39-69.

Resnick, L.B., Nesher, P., Leonard, F., Magone, M., Omanson, S. & Peled, I. (1989): Conceptual Bases of Arithmetic Errors. The Case of Decimal Fractions. In: *Journal for Research in Mathematics Education* 20 (1), 8-27.

Ross, S.H. (1989): Parts, Wholes, and Place Value: A Developmental View. In: *The Arithmetic Teacher,* 36 (6), 47-51.

Sprenger, L. & Hußmann, S. (2014): Stellenwerte von Dezimalzahlen verstehen. In: S. Prediger, C. Selter, S. Hußmann & M. Nührenbörger (Hrsg.): *Mathe sicher können. Diagnose- und Förderkonzept zur Sicherung mathematischer Basiskompetenzen*. Berlin: Cornelsen, 101-112.

Steinle, V. & Stacey, K. (2004): A longitudinal study of students' understanding of decimal notation: An overview and refined results. In: *Proceedings of the 27th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (2), 541-548.