Esther BRUNNER, Kreuzlingen

Beweistypen: Ihre unterschiedlichen kognitiven Anforderungen und ihr didaktisches Potenzial

Theoretische Einbettung und Bezüge

Lernt man durch Argumentieren konzeptuelles mathematisches Wissen aufzubauen oder geht es darum, spezifisch argumentieren zu lernen? Andriessen, Baker und Suthers (2003) unterscheiden zwischen „argue to learn“ und „learn to argue“. Zweiteres bezieht sich auf den Aufbau spezifischer Argumentationskompetenzen, Ersteres auf das Aufbauen konzeptuellen Wissens. Dabei gehen die Autoren von einem sehr weiten Argumentationsbegriff aus. Ein solcher liegt dem mathematischen Argumentieren gemäß der verschiedenen Bildungsstandards (D-EDK, 2014; D-EDK, 2014) aber nicht zugrunde. Die Präzisierung „mathematisch“ argumentieren (Blum, Drüke-Noe, Hartung & Köller, 2006) verdeutlicht, dass es um einen spezifischen Kontext geht, innerhalb dessen argumentiert werden soll, um die Mathematik. Da sich Mathematik als beweisende Wissenschaft versteht (Heintz, 2000), rückt auch die Beziehung zwischen Beweisen und Argumentieren in den Blick. Diese wird in der Literatur kontrovers konzeptualisiert (vgl. Reid & Knipping, 2010), was auch damit zusammenhängt, dass kein Konsens vorliegt, was man unter einem Beweis versteht (z.B. Reid, 2005), zumindest in der Schulmathematik.

Unterschiedliche Beweistypen

Eine mögliche integrierende Sicht zum Verhältnis von Argumentieren und Beweisen ist es, diese als Pole innerhalb eines Spektrums von Begründen („Reasoning“) in mathematischen Kontexten zu denken (vgl. Abbildung 1). Mathematisches Begründen kann unterschiedlich erfolgen, was auch an unterschiedlichen Beweistypen (Wittmann & Müller, 1988) illustriert werden kann. Diese Beweistypen verlangen je andere kognitive Prozesse und führen dadurch auch zu unterschiedlichen Repräsentationen des Denkens (Aebli, 2003). Damit stellen sie unterschiedliche kognitive Anforderungen und bieten auch ein je unterschiedliches didaktisches Potenzial.

Wittmann und Müller (1988) unterscheiden den experimentellen, den inhaltlich-anschaulichen oder operativen und den formal-deduktiven Beweis. Die ersten beiden können zu den präformalen Beweisen (Blum & Kirsch, 1991) gezählt werden, was ihre Bedeutung insbesondere für schulisches Lernen aber keineswegs schmälert. Der experimentelle Beweis arbeitet mit Beispielen und Gegenbeispielen, versucht also zu verifizieren oder zu falsifizieren, bleibt dabei aber grundsätzlich an die geprüften Beispiele gebun-

In Institut für Mathematik und Informatik Heidelberg (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2016* (S. x–y). Münster: WTM-Verlag

den. Er erzeugt somit auch keine Gewissheit bezüglich der Allgemeingültigkeit eines Satzes. Das Denken wird in konkreten Beispielen repräsentiert. Eine weitere Abstraktion ist nicht notwendig. Stylianides (2015, S. 216) spricht in diesem Zusammenhang von einem „empirischen Argument“, das aber noch keinen Beweis darstellt. Wird das empirische Argument bzw. das Beispiel allerdings für weitere verallgemeinernde Überlegungen und Aktivitäten in einem operativen Sinn verwendet, kann es den Status eines „generischen Beispiels“ bekommen und als Ausgangslage für einen inhaltlich-anschaulichen oder operativen Beweis dienen (Mason & Pimm, 1984). Der inhaltlich-anschauliche oder operative Beweis zeigt die Gültigkeit der Behauptung durch eine anschauliche Weise oder eine Manipulation im Sinne einer Operation auf. Dieser Beweistyp steht in der Tradition der Gestaltpsychologie (z.B. Wertheimer, 1964) und repräsentiert das Denken in einer Operation, die auf enaktiver oder ikonischer Ebene (Bruner, 1974) dargestellt wird. Beim formal-deduktiven Beweis schließlich wird eine weitere Abstraktion vorgenommen und das Denken formal-symbolisch repräsentiert und algebraisch ausgedrückt. Erlangt ist ebenfalls – wie bereits beim inhaltlich-anschaulichen oder operativen Beweis – Gewissheit bezüglich der Allgemeingültigkeit der Behauptung.

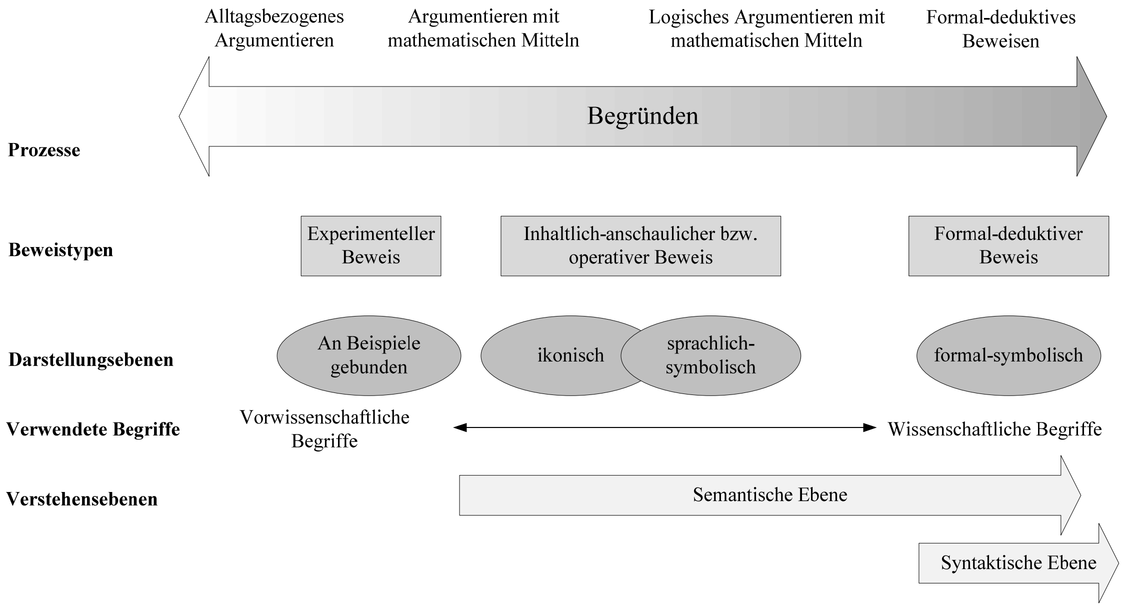

Abbildung 1: Kontinuum des mathematischen Begründens (Brunner, 2014, S.49, hier adaptiert)

Innerhalb des Begründungsspektrums werden je unterschiedliche Begriffe verwendet. Beim experimentellen, beispielgebundenen Arbeiten kann mit alltagsnahen und vorwissenschaftlichen Begriffen gearbeitet werden, während bei formal-deduktiven Beweisen der formale Ausdruck wissenschaftliche Begriffe (Vygotsky, 1969) benötigt. Beim inhaltlich-anschaulichen oder operativen Beweisen werden zunehmend vorwissenschaftliche Begriffe verwendet und wissenschaftliche erprobt, aber noch nicht formal ausgedrückt. Verstehen spielt sich innerhalb des Begründungsspektrums bei den verschiedenen Beweistypen ebenfalls auf unterschiedlichen Ebenen ab. Beim experimentellen Beweis ist kein grundsätzliches Verstehen des Zusammenhangs notwendig, wohl aber ein beispielbezogenes Handeln und Nachvollziehen des postulierten Zusammenhangs. Es geht also weniger um ein „Verstehen, *warum*“, sondern um ein „Überprüfen, *ob*“. Beim inhaltlich-anschaulichen oder operativen Beweis hingegen ist ein inhaltsnahes semantisches Verstehen der Struktur notwendig. Ein solches liegt auch dem formal-deduktiven Beweis zugrunde, der erkannte Zusammenhang wird aber zudem noch auf der syntaktischen Verstehensebene ausgedrückt.

Didaktisches Potenzial der Beweistypen

Die drei Beweistypen mit ihren je unterschiedlichen kognitiven Prozessen und deren Repräsentation lassen sich aber nicht nur innerhalb des Spektrums mathematischen Begründens verorten, sondern weisen auch ein unterschiedliches didaktisches Potenzial auf, das für den schulischen Mathematikunterricht genutzt werden kann. Das Potenzial der Beweistypen soll hinsichtlich zwei für das Mathematiklernen zentraler Aspekte diskutiert werden: 1) bezogen auf das Vorwissen der Schülerinnen und Schüler und damit in einem adaptiven Sinne und 2) hinsichtlich der Möglichkeiten zur selbstständigen Bearbeitung und Partizipation am Gespräch.

Experimentelle Beweise benötigen kein großes mathematisches Vorwissen und auch keine Verwendung von formal-symbolischer Sprache und sind somit gerade auch für leistungsschwächere und jüngere Schülerinnen und Schüler geeignet. Darüber hinaus enthalten sie ein hohes Potenzial zum Experimentieren im Sinne von Verifikationen und Falsifikationen, ohne dass substanziell neue, eigene Ideen und Begründungen zum Zusammenhang notwendig wären. Ihr Potenzial für Selbsttätigkeit und Partizipation ist somit hoch. Inhaltlich-anschauliche oder operative Beweise verlangen eine Einsicht in die Allgemeingültigkeit einer mathematischen Struktur und damit eine Verallgemeinerung. Sie benötigen deshalb mehr Abstraktionsfähigkeit von den Lernenden und mehr inhaltlich-mathematisches Vorwissen, weil es nicht genügt, etwas zu verifizieren oder falsifizieren. Ihr Potenzial bezüglich Selbsttätigkeit und Partizipation ist aber dennoch groß, weil keine formal-symbolische Sprache für die Formulierung des gefundenen Zusammenhangs notwendig ist. Formal-deduktive Beweise hingegen erfordern sowohl ein großes inhaltlich-mathematisches Vorwissen als auch algebraische Kenntnisse. Je nach Schulstufe und Voraussetzungen der Lernenden ist deshalb das Potenzial für Selbsttätigkeit und aktive Partizipation deutlich geringer als bei den anderen beiden Beweistypen. Inhaltlich-anschaulichen bzw. operativen Beweisen kommt eine besondere Stellung zu: Sie dienen sowohl zum Aufbau konzeptuellen mathematischen Wissens als auch dazu, spezifisch argumentieren zu lernen und Verallgemeinerungen zu erproben. Dadurch nehmen sie eine Brückenfunktion zwischen experimentellem Arbeiten und formal-deduktivem Beweisen ein.

Literatur

Aebli, H. (2003). *Zwölf Grundformen des Lehrens. Eine Allgemeine Didaktik auf psychologischer Grundlage. Medien und Inhalte didaktischer Kommunikation, der Lernzyklus* (12. Aufl.). Stuttgart: Klett-Cotta.

Andriessen, J., Baker, M. J. & Suthers, D. (2003). Argumentation, computer support, and the educational context of confronting cognitions. In J. Andriessen, M. J. Baker & D. Suthers (Hrsg.), *Arguing to Learn: Confronting Cognitions in Computer-Supported Collaborative Learning environments* (S. 1–25). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Blum, W., Drüke-Noe, C., Hartung, R. & Köller, O. (Hrsg.). (2006). *Bildungsstandards Mathematik: konkret. Sekundarstufe I: Aufgabenbeispiele, Unterrichtsanregungen, Fortbildungsideen.* Berlin: Cornelsen.

Blum, W. & Kirsch, A. (1991). *Preformal proving: Examples and reflections. Educational Studies in Mathematics, 22*(2), 183–203.

Bruner, J. (1974). *Entwurf einer Unterrichtstheorie.* Berlin: Cornelsen.

Brunner, E. (2014). *Mathematisches Argumentieren, Begründen und Beweisen: Grundlagen, Befunde und Konzepte.* Heidelberg: Springer.

D-EDK. (2014). *Lehrplan 21. Mathematik.* Bern: Projekt Lehrplan 21.

Heintz, B. (2000). *Die Innenwelt der Mathematik. Zur Kultur und Praxis einer beweisenden Disziplin.* Wien: Springer.

Reid, D. (2005). The meaning of proof in mathematics education. In M. Bosch (Hrsg.), *European Research in Mathematics Education IV. Proceedings of CERME 4, San Feliu de Guixols, Spain, 2005.* Barcelona: Universität Ramon Llull.

Reid, D. A. & Knipping, C. (2010). *Proof in Mathematics Education. Research, Learning and Teaching.* Rotterdam: Sense Publisher.

Stylianides, A. J. (2015). The role of mode of representation in students' argument construction. In K. Krainer & N. Vondrová (Hrsg.), *Proceedings of the Ninth Conference of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME9, 4-8 February 2015)* (S. 213–210). Prague, Czech Republic: Charles University in Prague, Faculty of Education and ERME.

Vygotsky, L. S. (1969). *Denken und Sprechen.* Frankfurt a.M.: Fischer.

Wertheimer, M. (1964). *Produktives Denken* (2. Aufl.). Frankfurt a.M.: Kramer.

Wittmann, E. C. & Müller, N. G. (1988). Wann ist ein Beweis ein Beweis? In P. Bender (Hrsg.), *Mathematikdidaktik – Theorie und Praxis. Festschrift für Heinrich Winter* (S. 237–258). Berlin: Cornelsen.