Hans-Jürgen ELSCHENBROICH, Korschenbroich

Ein neuer Vorschlag zur Vermittlung von Grundvorstellungen der Integralrechnung

Traditionell wurde und wird in der Schule die Integralrechnung meist über Flächenberechnungen eingeführt. Moderne Ansätze wie auch die Bildungsstandards gehen eher von der Änderung zum Bestand. In beiden Ansätzen kommt man zur Berechnung und Umformung von Produktsummen mit entsprechenden herzuleitenden Formeln. Dann geht es schnell zum Hauptsatz, zu Katalogen von Stammfunktionen und zu Integrationsregeln - oft zu schnell und das Verständnis von Integration und den zugehörigen Grundvorstellungen bleibt auf der Strecke. Schaut man etwas zurück, so stellt man fest, dass dies erst eine Entwicklung seit einigen Jahrzehnten ist:

"Es besteht ja kein Zweifel darüber, dass die Technik des Integrierens nicht zu den Lehraufgaben der höheren Schule gehört, dagegen darf man wohl von einem zur Hochschule gehenden jungen Menschen erwarten, dass er den Sinn des Integralzeichens wirklich begriffen hat." (Kraft, 1948).

1. Integrator I und II

Klassische analoge Geräte wie *Integrimeter* oder *Integraph* konnten auf graphischem Wege Integrale ermitteln oder Integralfunktionen zeichnen. Diese Geräte können heute wieder Impulse geben, mit dynamischer Software anschauliche und kalkülfreie Zugänge zur Integralrechnung und den dazu gehörigen Grundvorstellungen zu beschreiten (Elschenbroich, 2016a).

In der Lernumgebung Integrator (www.integrator-online.de) kann man beliebig Funktionen und Intervallgrenzen sowie einen Schieberegler n eingeben. Damit werden dann die Untersumme U_n und die Obersumme O_n (und bei Bedarf auch die Trapezsumme T_n) berechnet. Vergrößert man das n am Schieberegler, so kann man erleben, wie sich bei schultypischen Funktionen U_n und O_n einander immer mehr nähern. Dafür braucht man keine trickreichen Termumformungen, sondern nutzt GeoGebra als fleißigen Rechenknecht. Auch wenn so kein wirklicher Grenzprozess durchgeführt wird, kann man bis n = 1000 den Annäherungsvorgang schulgemäß verdeutlichen. Auf dieser Basis kann dann in üblicher Weise das Integral $\int_a^b f(x)dx$ eingeführt werden. Als Visualisierung ist es dabei hilfreich, die Flächen zwischen dem Graphen von f und der x-Achse je nach Vorzeichen von f(x) unterschiedlich zu färben.

In Integrator II wird dies dann dynamisiert, indem man von a bis x mit

In Institut für Mathematik und Informatik Heidelberg (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2016* (S. x–y). Münster: WTM-Verlag

$x \in [a; b]$ rechnet. Nimmt man die Werte der Untersumme U_n bzw. der Obersumme O_n als y-Koordinate von Punkten, so bekommt man zwei Punkte $U_a = (x, U_n)$ bzw. $O_a = (x, O_n)$, deren Verhalten man bei Veränderung von x untersuchen kann. Ihre Ortslinien liefern die Graphen der Unter- bzw. Obersummenfunktion, die sich dann (bei schultypischen Funktionen) bei Vergrößerung von n immer mehr annähern und schließlich faktisch ununterscheidbar werden (Elschenbroich, 2016b). Das ist ein graphischer Weg zur Integralfunktion (der sich in der Form eher für Leistungskurse empfiehlt).

2. Integrator III

Man kann aber auch alternativ direkt mit dem im Integrator I eingeführten Integral von a bis x arbeiten und dies als y-Koordinate eines Punktes $I_a = (x, \int_a^x f(t)dt)$ nutzen. Damit kommt man zur Integralfunktion, graphisch als Ortslinie von I_a oder funktional mit einem entsprechenden GeoGebra-CAS-Befehl. Lässt man die Integralfunktion nur auf dem Intervall [a; x] zeichnen oder hebt sie dort deutlich hervor, so hat man eine dynamische digitale Repräsentation des Gerätes Integraph.

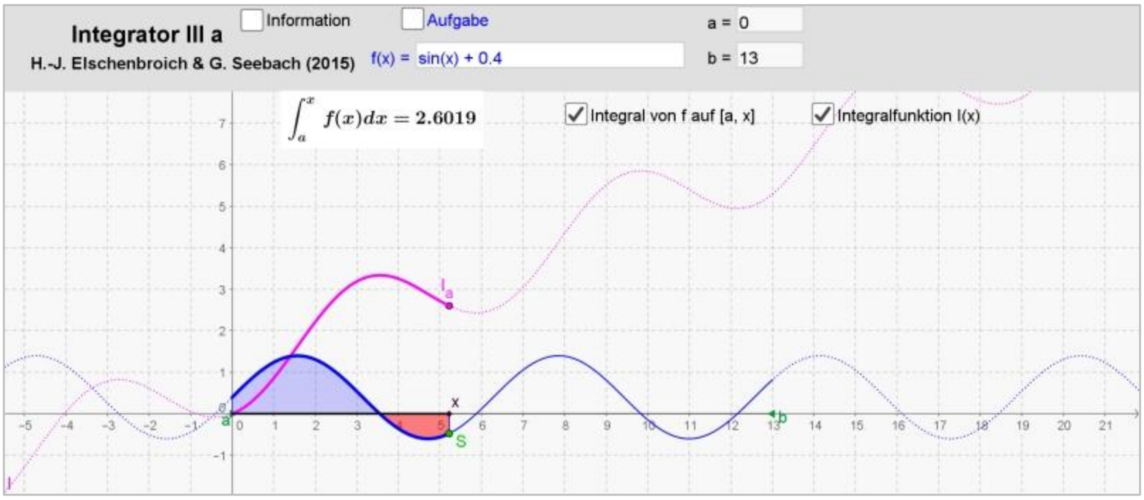

Abb. 1 Integralfunktion/ Integraph

Hier kann man unmittelbar und interaktiv den Zusammenhang zwischen dem Verlauf von f und der Integralfunktion erforschen (z.B. wie wirken sich Extrema oder Vorzeichenwechsel von f aus?).

Mit einer Erweiterung der Lernumgebung kann man weiter die Tangente der Integralfunktion einblenden und ihre Steigung untersuchen. Dabei wird der Zusammenhang zwischen der Steigung (Ableitung) der Integralfunktion und dem Wert von f entdeckt. Das ist die Satz<u>findung</u> des Hauptsatzes!

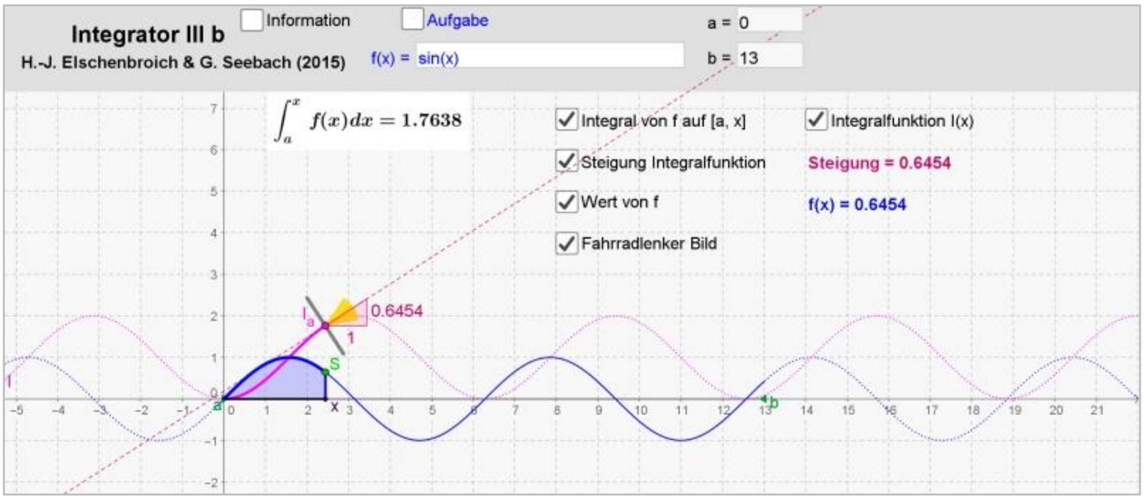

Abb. 2 Entdeckung des Hauptsatzes

3. Integrator V

Mit dem Integrator V werden Volumina von Rotationskörpern berechnet, zunächst klassisch bei der Rotation des Graphen von f um die x-Achse. Aus den Rechteckstreifen werden in der Rotation zylindrische Scheiben, die dann - wieder ohne Termumformungen, nur mit der Rechenpower von GeoGebra - aufsummiert werden.

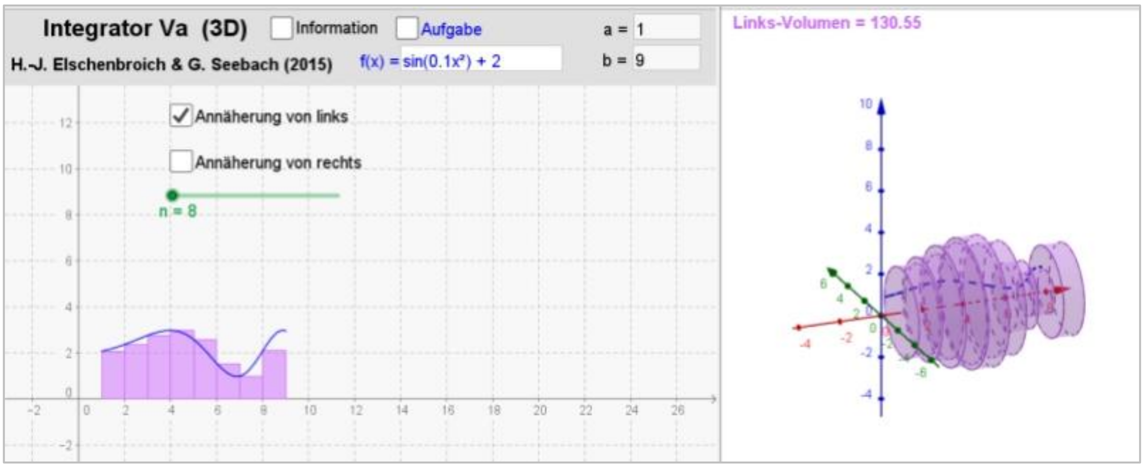

Abb. 3 Rotation um die x-Achse, n = 8.

Für große n bekommt man einen relativ 'glatt' aussehenden Körper. Mit dem GeoGebra-Befehl `Oberfläche` kann man dessen Oberfläche direkt, effizient und gut aussehend erzeugen.

Dies bietet nun die Möglichkeit, eine zur x-Achse orthogonale Fläche durch den Körper wandern zu lassen und die kreisförmigen Schnittflächen zu betrachten. Für die Flächeninhalte dieser Querschnitte erhält man die Funktion $qu(x) = \pi \cdot f^2(x)$. Dies gibt einen Perspektivwechsel: Statt der Rotation der Fläche unter dem Graphen von f um die x-Achse kann man sich den Körper durch die Bewegung von (Kreis-)Flächen längs der x-Achse entstanden denken. Das Volumen ist das Integral von qu(x) über [a, b]. Dies ist die durch dynamische Software gestützte Wiederbelebung eines alten, fast in Vergessenheit geratenen Ansatzes.

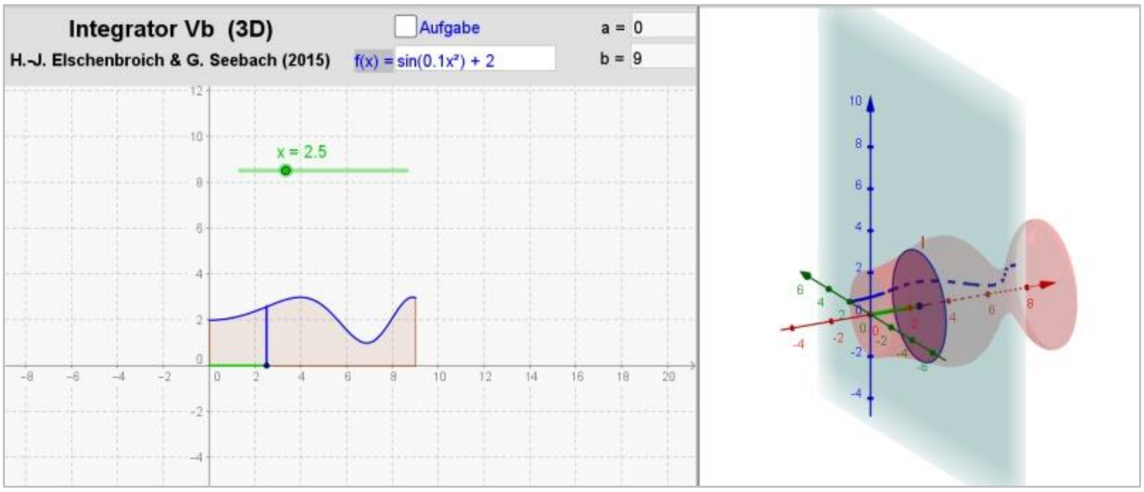

Abb. 4 Querschnittfläche längs der x-Achse

4. Fazit

Dynamische Mathematik-Software ermöglicht dynamische Zugänge zu Grundvorstellungen der Integralrechnung. Dabei steht der Aufbau von Verständnis im Vordergrund. Der typische Integralrechnungskalkül soll dadurch nicht ersetzt werden, sondern es soll eine Grundlage für das anschließende Exaktifizieren und die anschließende Theorie gegeben werden. Es geht darum, zunächst "ohne Kalkül adäquate Grundvorstellungen zum Begriff der Ableitung und des Integrals aufzubauen" (Büchter & Henn, 2010, S. 80), wozu hier für den Bereich der Integralrechnung ein Beitrag geleistet werden soll. Für den hier vorgestellten Weg ist die Fähigkeit der Software entscheidend, umfangreiche Rechnungen durchzuführen, mit Zugmodus und Schiebereglern zu arbeiten, berechnete Werte in dynamische Punkt-Koordinaten zu übertragen und damit Ortslinien zu erzeugen.

Literatur

Büchter, A. & Henn, H.-W. (2010): Elementare Analysis. Von der Anschauung zur Theorie. Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg

Elschenbroich, H.-J. (2016a): Anschauliche Zugänge zur Analysis mit alten und neuen Werkzeugen. In: *Der Mathematikunterricht 1/2016*, S. 26 - 34

Elschenbroich, H.-J. (2016b): Digitale Werkzeuge im Analysis-Unterricht. In: Blum, W. & Vogel, S. & Drüke-Noe, C. & Roppelt, A. (Hrsg.): *Bildungsstandards aktuell: Mathematik in der Sekundarstufe II*. S. 244 - 254

Kraft, A. (1948): Propädeutik im mathematischen Unterricht. In: *MNU 1/1948*. S. 9 - 13