Christian FAHSE, Ralf WAGNER, Landau

„Propädeutischer“ Grenzwertbegriff - eine erprobte Konkretisierung für die Unterrichtspraxis

Ein rigoroser Grenzwertbegriff baut auf Folgen auf. Interessanterweise kommt das Wort „Folgen“ in den Bildungsstandards (KMK, 2015) gar nicht vor. Die Auslassung bzw. Verschiebung des Themas „Folgen“ erlaubt es, gleich zu Beginn des Analysisunterrichts den Ableitungsbegriff anzusteuern. Ein "propädeutischer" Grenzwertbegriff müsste also genügend tragfähig sein, um mit ihm Grenzwerte von Differenzenquotienten ohne Folgen und ohne einen formalen Grenzwertbegriff behandeln zu können. Gleichzeitig sollte er anschlussfähig an die fachmathematischen Definitionen sein und persistierende Fehlvorstellungen vermeiden.

Unterrichtsvorschlag – Einstieg in die Analysis

Im Folgenden soll eine konkrete Unterrichtsidee grob skizziert werden. Diese wurde von beiden Autoren in insgesamt 7 Kursen an rheinland-pfälzischen Gymnasien erprobt. Direkt am Anfang wird eine Aufgabe gestellt, die problemorientiert auf die Steigung in einem Punkt führt (z. B. Weiterführung eines Brückenbogens in ein gerades Element). Zunächst werden die Schüler nur Näherungslösungen erzielen. Die naheliegende Betrachtung mit der Funktionenlupe (Elschenbroich, 2015) zeigt das erste erstaunliche Ergebnis: Die geschwungene Kurve ist vergrößert (fast) „gerade“, und die Weiterführung erweist sich als Sekante. Schülerlösungen können in einer Tabelle (vgl. Tab. 1) gesammelt werden. Das Problem einer knickfreien Fortführung lässt die Tabelle naheliegenderweise mit immer kleinerem Abstand h der Stützstellen fortführen. Im Falle einfacher Funktionen und ganzzahliger Stützstellen lässt sich oft ein optimaler Wert raten. Die zugehörige Gerade erweist sich als Tangente, die in der Funktionenlupe lokal deckungsgleich mit dem Graphen der Funktion erscheint. Schreibt man die letzte Zeile der Tabelle allgemein, so lässt sich in manchen Fällen der Stützstellenabstand h im Nenner kürzen und der geratene Wert kann algebraisch bestätigt werden. Das Limeszeichen kann als Umschreibung dieses Grenzwertüberganges an der Tabelle plausibel eingeführt werden.

Hinsichtlich des methodischen Vorgehens ist es wichtig, zunächst ganz nah am gewählten Kontext zu bleiben und das Modellieren (Gruppenarbeit) in den Vordergrund zu stellen, also authentisch problemorientiert zu unterrichten. Die dargestellte Tabelle stellt also nur den Endpunkt einer Entwicklung dar, in der insbesondere bei der Aufstellung der Formel des Differenzenquo-

In Institut für Mathematik und Informatik Heidelberg (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2016* (S. x–y). Münster: WTM-Verlag

tienten der Impuls zur Verallgemeinerung durch die Lehrkraft gegeben werden muss. Der untersuchte Grenzübergang wird parallel dazu mittels entsprechender Applets visualisiert.

Stützpunkte		Differenzenquotient	Steigung
(2|4) und	(3|9)	(9 – 4)/(3 – 2)	5
	(2,5|6,25)	(6,25 – 4)/(2,5 – 2)	4,5
	(2,1|2,1²)	(2,1² – 4)/(2,1 – 2)	4,1
	(2,01|...)	...	4,01
(x|x²) und	(x+h|(x+h)²)	((x+h)²– x²)/(x+h – x)	2x + h
	(x|x²)	/	2x

Abb. 1 Tabelle

Die Tabelle zur numerischen und algebraischen Bestimmung der Ableitung entwickelt sich in mehreren Doppelstunden.

Theoretischer Hintergrund

Der Vorschlag, den Ableitungsbegriff ohne vorherige Thematisierung von Folgen einzuführen, ist nicht neu. Bereits zu Beginn des 20. Jahrhunderts kam die Idee intuitiver Zugänge zur Analysis auf. Artin (1957) und Lang (1964) stellten Zugänge mittels eines intuitiven Grenzwertbegriffes dar, die in der deutschen didaktischen Landschaft zunehmend Widerhall fanden (Blum 1979). Auch aktuelle Standardwerke behandeln zunächst einen "propädeutischen" oder "anschaulichen" Grenzwertbegriff (Büchter & Henn 2010, S. 85, 88). Blum betont die Vorteile auch bzgl. der Anschlussfähigkeit: „Ein vereinfachter Grenzwertbegriff verbaut also nichts, er ist im Gegenteil noch offen für sämtliche Arten der Präzisierung“ (Blum 1979). Dennoch wird bis heute die fehlende Strenge im mathematischen Verständnis eines solchen anwendungsorientierten, anschaulichen Ansatzes kritisch gesehen (Weigand 2015, S. 97).

Der hier unterbreitete Unterrichtsvorschlag stellt heraus, dass für das Modellieren im Rahmen der Differenzialrechnung ein intuitiver Grenzwertbegriff ausreichen kann. Die Frage, ob es curricular vertretbar ist, auf das Thema „Folgen“ und einen rigoroseren Grenzwertbegriff gänzlich zu verzichten, wird hier nicht behandelt. Stattdessen wird im Folgenden argumentiert, dass es legitim ist, einen intuitiven Grenzwertbegriff ohne die *vorherige* Behandlung von Folgen mit einem exakten Grenzwertbegriff zu unterrichten, indem die mathematische übliche Auffassung des Begriffs "Grenzwert" in eine Abfolge von Vorstellungen eingeordnet wird.

Ausweitung des Grenzwertbegriffs

Zunächst soll die Vielfältigkeit des Grenzwertbegriffes beispielhaft dargestellt werden. Am einfachsten können Grenzwerte numerisch näherungsweise berechnet werden – nur dies wurde im Praxisvorschlag verwendet. Man denkt beim Thema „Grenzwerte“ wohl meist an Zahlenfolgen, die algebraisch auf einen Grenzwert führen oder graphisch gegen einen Wert streben. Aber dies ist nur ein Aspekt. Folgen geometrischer Figuren (archimedischer Polygone) können gegen eine Grenzfigur (Kreis) konvergieren, was anschaulich beispielsweise als Daumenkino realisiert werden kann. Zufallsvariablen konvergieren stochastisch nur "fast sicher", Abweichungen kann es geben, aber sie sind "beliebig unwahrscheinlich". Bei der Konvergenz von Funktionen kann neben der Konvergenz von Funktionswerten etwa bei hebbaren Definitionslücken, auch der Verlauf der Funktion als Ganzes gegen eine Asymptote konvergieren. Topologische Filter verallgemeinern den Grenzwertbegriff, Non-Standard-Zahlen stellen die Konvergenz reeller Zahlenfolgen in einen besonderen Zusammenhang.

Gemeinsam ist allen Beispielen eine geordnete Menge von Objekten in einem gemeinsamen Raum, in dem ein Konzept der "Nähe" definiert ist. Wichtiger sind allerdings die Unterschiede. Die angeführten Beispiele sollen verdeutlichen, dass die gedankliche Fixierung des Konvergenzbegriffs auf Zahlenfolgen zu eng ist. Erstens gibt es vielfältige relevante Zielräume. Zweitens kann man die Indexmenge einerseits auf die reellen Zahlen ausweiten, andererseits treten beim Daumenkino und der numerischen Grenzwertbestimmung sogar endliche Indexmengen auf, die auf Näherungsverfahren führen.

Propädeutischer Grenzwert als ein Schritt in der Begriffsbildung

Grenzwerte von Zahlenfolgen sind deshalb auch nur eine Stufe in einer Folge von Verallgemeinerungen des Grenzwertbegriffes. Dies soll nun durch einen Vergleich mit der Zahlbereichserweiterung deutlich gemacht werden. Statt nach dem Grenzwert fragt man hier: Was ist eine Zahl? Zunächst sind dies nur die natürlichen Zahlen. Dann kommt die Null hinzu, die gar nichts zählt. Die negativen Zahlen zählen vielleicht noch Fehlendes, die rationalen Zahlen messen zwar noch, aber nicht alles. Dies führt auf die irrationalen Zahlen. Spätestens mit den komplexen Zahlen ist die Vorstellung, dass mit Zahlen die Größe einer Menge bestimmt wird, nicht mehr zu halten, denn sie sind nicht anzuordnen. Schließlich können mit Hamiltonschen Quaternionen, Non-Standardzahlen und Zufallsvariablen als verallgemeinerten Zahlen zusätzliche Erweiterungen stattfinden. Obwohl Zahlen letztlich nur algebraische Objekte sind, gilt es als legitim, in der Primarstufe das Verständnis von Zahlen damit zu verbinden, dass sie etwas Konkretes zählen. Dieser Zahlbegriff muss dabei nur flexibel und anschlussfähig sein.

Und hier kommen wir zu dem zentralen Punkt: Die Autoren stellen zur Diskussion, bei der Entwicklung des Grenzwertbegriffs analog zu verfahren. Zunächst kann der Grenzwert durchaus ungefähr gleich dem letzten Wert in einer endlichen Tabelle von Folgengliedern sein. Dies ist beim Differenzenquotient praktikabel, wenn die Stützstellendifferenz h nur klein genug ist (und führt für die in der Schule üblichen lokalkonvexen oder –konkaven Funktionen sogar zu einer Fehlerabschätzung!). In einem weiteren Schritt muss dann die Problematik einer solchen Definition aufgezeigt werden, genauso wie in der Zahlbereichserweiterung die Problematik der "Zählvorstellung" thematisiert wird. Dieses Konzept kann dann mittels formaler Schreibweisen für geeignete Termumformungen nutzbar gemacht werden und ist anschlussfähig an formale Grenzwertdefinitionen und -sätze.

Fazit

Das hier vorgestellte Konzept soll im Zusammenhang mit dem propädeutischen Grenzwertbegriff der Bildungsstandards als Beitrag auf unterschiedlichen Ebenen verstanden werden. Zum einen stellt es ein konkretes unterrichtliches Vorgehen dar. Dabei wird "propädeutisch" so interpretiert, dass nicht der Grenzwert, sondern der Ableitungsbegriff im Vordergrund steht. Zum anderen wurde die Verengung des Grenzwertbegriffes auf Folgen als fachmathematisch problematisch herausgestellt und die Stufenhaftigkeit des Grenzwertbegriffes in Analogie zur Zahlbereichserweiterung gesetzt, welche in akzeptierter Weise anschlussfähige Begriffsbildungen und ihre Erweiterungen thematisiert.

Literatur

Artin, E. (1957). A freshman honors course in calculus and analytic geometry. Taught at Princeton University. Charlottesville, VA: Mathematical Association of America.

Blum, W. (1975). Ein Grundkurs in Analysis. Didaktik der Mathematik, 3, 163–184.

Büchter, A. & Henn, H.-W. (2010). Elementare Analysis. Von der Anschauung zur Theorie. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag.

Elschenbroich, H.-J. (2015). Anschauliche Differenzialrechnung mit der Funktionenlupe. MNU, 68(5), 273–277.

Lang, S. (1964/1973). A first course in calculus. Dordrecht: Springer.

Sekretariat der Ständigen Konferenz der Kultusminister der Länder in der Bundesrepublik Deutschland (Hrsg.) (2015). Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife (Beschluss der Kultusministerkonferenz vom 18.10.2012). Köln: Link.

Törner, G., Potari, D., & Zachariades, T. (2014). Calculus in European classrooms: curriculum and teaching in different educational and cultural contexts. ZDM, 46(4), 549–560.

Weigand, H.-G. (2015). From an intuitive-oriented to a content-oriented understanding of the basics of calculus. Proceedings of the ICTMT12, Fargo.