Maria FAST, Wien

Folgerungen aus einer Längsschnittstudie zum Addieren und Subtrahieren von Klasse 2 bis Klasse 4

Die Lösungswege bei zwei- und dreistelligen Additionen und Subtraktionen entwickeln sich bei allen Kindern im Laufe der Grundschulzeit weiter, unterscheiden sich jedoch in den Herangehensweisen. Im Rahmen einer Längsschnittstudie konnten sieben typische Entwicklungsverläufe identifiziert werden (Fast, 2016). In diesem Beitrag werden die zentralen Ergebnisse vorgestellt und interpretiert.

Zentrale Ergebnisse

Manche Kinder zerlegen beim Addieren und Subtrahieren immer beide Zahlen in die einzelnen Stellenwerte und verknüpfen die einzelnen Zahlen bzw. Ziffern variationsreich. Dieses Vorgehen mit den sich daraus ergebenden Lösungswegen wird als *Rechnen in den Stellenwerten* bezeichnet. Neben dem *stellenweisen Rechnen* und dem *algorithmischen Rechnen,* die im Schulbuch angeboten und im Unterricht thematisiert werden, zeigt sich als weitere Lösungsmethode *Rechnen mit den Ziffern in den Stellenwerten*. Diese Lösungsmethode fehlt in didaktischen Kategorisierungen und wird auch nicht in Schulbüchern thematisiert, trotzdem tritt sie in unterschiedlichen Ausprägungen auf. Die Kinder verknüpfen die Ziffern in den einzelnen Stellenwerten nicht nur als vorgegebenes algorithmisches Verfahren, sondern wie beim stellenweisen Rechnen auf vielfältige Art, sowohl richtig, entsprechend der Rechengesetze, als auch falsch.

Andererseits gibt es Kinder, die beim Addieren und Subtrahieren vorerst die Zahl in ihrer Ganzheit erfassen und nicht sofort in ihre Stellenwerte zerlegen. Sie bevorzugen eine ordinale Sicht auf Zahlen, gehen sukzessive fortschreitend vor. Als Lösungsmethoden praktizieren die Kinder nicht nur das im Schulbuch angebotene und im Unterricht thematisierte *schrittweise Rechnen*, sondern auch die in dieser Stichprobe nicht im Unterricht explizit thematisierten Lösungsmethoden *Ableiten* (Nutzen einer Hilfsaufgabe, gegensinniges und gleichsinniges Verändern, Ergänzen bei der Subtraktion) und *kombinierte Lösungsmethoden*. Diese Sicht auf Zahlen mit den sich daraus ergebenden Lösungswegen wird als *Rechnen mit Zahlganzheiten* bezeichnet.

Weiters können Entwicklungsverläufe identifiziert werden, die von an Zahlganzheiten orientierten Lösungsmethoden zu stellenwertorientierten Lösungsmethoden wechseln.

In Institut für Mathematik und Informatik Heidelberg (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2016* (S. x–y). Münster: WTM-Verlag

Zahlverständnis und Wissen um Rechenoperationen

Kinder zeigen in ihren Lösungswegen hohe Kontinuität. Die intraindividuellen Unterschiede über drei Schuljahre hinweg sind wesentlich geringer als die interindividuellen Differenzen. Vieles deutet darauf hin, dass ein Zusammenhang zwischen den Lösungswegen und dem individuellen konzeptuellen Wissen über Zahlen besteht. Somit können die Ergebnisse von Hiebert und Wearne (1996) bzw. Carpenter, Franke, Jacobs, Fennema und Empson (1997) bestätigt werden, die ebenfalls in ihren Längsschnittstudien das Ausführen von Additions- und Subtraktionsaufgaben in einem Zusammenhang mit dem Zahlverständnis, insbesondere Kenntnissen des dekadischen Systems, sehen.

Während von einem Zusammenhang zwischen den Lösungswegen und dem individuellen Konzept von Zahlen ausgegangen werden kann, gibt es keinen unmittelbaren Zusammenhang zwischen Lösungsquote und dem Konzept von Zahlen. Wenn algorithmische Rechenverfahren prozedural ausgeführt werden, kann es sehr wohl zu hohen Lösungsquoten, aber zu keinem ausgeprägten Zahlverständnis kommen, wie es der Typ *Von ziffernrechnend zu algorithmisch rechnend (mit niedriger Lösungsquote)*, einer der sieben typischen Entwicklungsverläufe, am Ende der vierten Schulstufe zeigt.

Die niedrigsten Lösungsquoten und die unsichersten Konzepte treten bei Entwicklungsverläufen auf, bei denen vorrangig das *Rechnen in den Stellenwerten* praktiziert wird. Bedingt durch das unbedingte Trennen der jeweiligen Zahlen in ihre Stellenwerte kann es zu einem reduzierten Verständnis von Zahlen kommen, das als „Concatenated single digit conception“ (Fuson et al., 1997, S. 142) bezeichnet wird und vor allem im Zusammenhang mit sehr frühem algorithmischem Rechnen beschrieben wurde. In der vorliegenden Untersuchung kann dieses Phänomen durch den Typ *Von ziffernrechnend zu algorithmisch rechnend (mit niedriger Lösungsquote)* über drei Jahre bestätigt werden.

Algorithmische Rechenverfahren verstärken ziffernorientierte Lösungsmethoden. Der in dieser Studie forcierte differentielle Ansatz zeigt, dass dies nicht ein universelles Phänomen ist, wie es implizit in früheren Studien (Csikos, 2012; Selter, 2000) aufscheint, sondern nur bei gewissen Entwicklungsverläufen auftritt und mit einem damit zusammenhängenden fehlenden Verständnis von Zahlen und defizitären Wissen über Rechenoperationen gekoppelt ist.

Für flexibles Rechnen ist *Rechnen mit Zahlganzheiten* Voraussetzung. Das Praktizieren aufgabenadäquater Lösungsmethoden (insbesondere Ableiten) erfordert, Zahl- und Aufgabenbeziehungen zu erkennen. Das ist nur möglich, wenn Zahlen in ihrer Ganzheit erfasst und nicht sofort in die einzelnen Stellenwerte zerlegt werden. Dies gelingt sehr wohl Kindern in dieser Studie, obwohl der Unterricht nicht darauf ausgerichtet war. Damit können die Forschungsergebnisse von Torbeyns, Verschaffel und Ghesquière (2006) bzw. Torbeyns, De Smedt, Ghesquière und Verschaffel (2009) bestätigt werden, dass Kinder mit einem guten Auffassungsvermögen, unabhängig vom Unterricht, flexibles Rechnen durchführen.

Divergenz zwischen stoffdidaktischen und empirischen Kategorien

Die Studie zeigt, dass die in der gängigen didaktischen Literatur üblichen Kategorisierungen in mündliches, halbschriftliches Rechnen, zusammengefasst als *Zahlenrechnen* und schriftliches Rechnen, als *Ziffernrechnen* bezeichnet, von einer empirischen Kategorisierung abweicht (Abbildung 1).

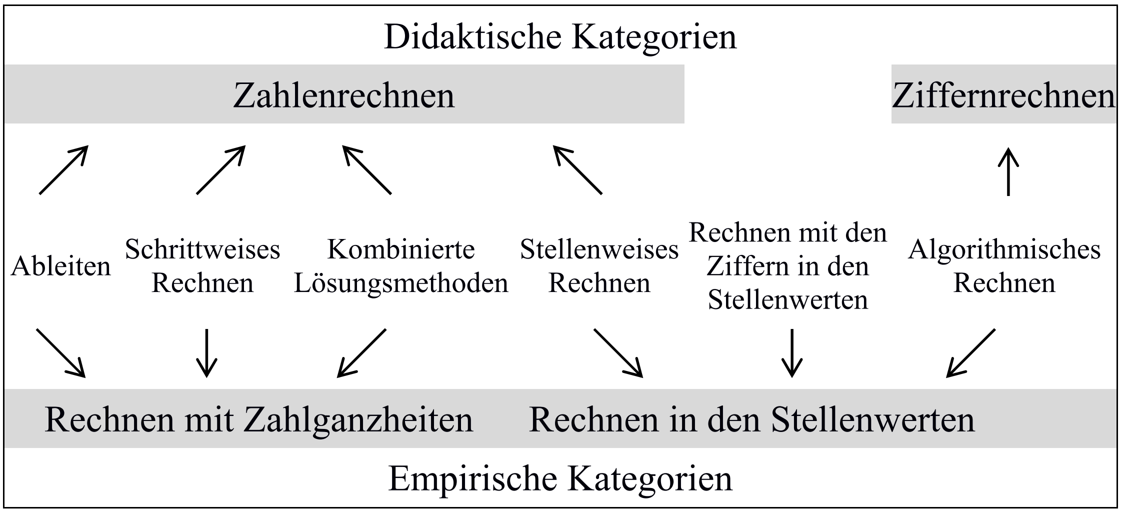

Abbildung 1: Divergenz zwischen didaktischen und empirischen Kategorien

Die Kinder verwenden beim *Rechnen in den Stellenwerten* unter anderem auch Mischformen, bei denen sie einen Teil der Aufgabe durch *Zahlen*-, einen anderen durch *Ziffernrechnen* bewältigen. Sie wechseln auch innerhalb einer Aufgabe zwischen Ziffern und Zahlen, was sich darin äußert, dass sie z. B. erst mit 3 und fortgesetzt mit 30 rechnen.

Die grundlegenden Unterschiede, welche didaktisch *Zahlen- und Ziffernrechnen* zugeordnet werden, verschwinden in den Aussagen der Kinder. Sie zerlegen in die Stellenwerte und setzen frei, ‚halb frei' oder normiert wieder zusammen. Obwohl didaktisch *stellenweises Rechnen* dem *Zahlenrechnen* und *algorithmisches Rechnen* dem *Ziffernrechnen* zuzuordnen ist, sind diese beiden Lösungsmethoden bezüglich Zahlvorstellungen und den daraus sich ergebenden Verknüpfungen empirisch in den Lösungswegen der Kinder weitgehend ähnlich. Somit ist *stellenweises Rechnen* eng an die zwei weiteren stellenorientierten Lösungsmethoden angebunden. Daraus ergibt sich, dass die zwei „fundamental verschiedenen Denkweisen" (Selter, 1999, S. 7) des *Zahlen- und Ziffernrechnens*, die aus normativ curricular-didaktischer Sicht nicht organisch auseinander hervorgehen können, im Denken der Kinder fließend ineinander übergehen.

Empirisch scheint beim Addieren und Subtrahieren ausschlaggebend zu sein, ob Kinder Zahlganzheiten sehen oder ob sie Zahlen sofort in Stellenwerte zerlegen. Das bedeutet, dass die Kategorisierung in mündliches, halbschriftliches und schriftliches Rechnen für die Beschreibung von Lösungswegen und auch für das Erfassen des Lernstands im Unterricht nur bedingt weiterführt.

Gesamt kann festgehalten werden, dass die Schritte zum verständigen Rechnen konzeptuell anspruchsvoller sind, als gemeinhin angenommen wird. Vieles deutet darauf hin, dass die Sicht auf Zahlen prägend ist. Diese Sicht auf Zahlen zeigt sich in dieser Studie sehr stabil und konnte im Rahmen des stattfindenden, eher traditionell orientierten Unterrichts kaum aufgebrochen werden.

Literatur

Carpenter, T. P., Franke, M. L., Jacobs, V. R., Fennema, E. & Empson, S. B. (1997). A Longitudinal Study of Invention and Understanding in Children's Multidigit Addition and Subtraction. *Journal for Research in Mathematics Education 29*(1), 3–20.

Csíkos, C. (2012). Sucess and strategies in 10 year old students' mental three-digit addition. In T.-Y. Tso (Hrsg.), *Proceedings of the 36th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. 2*, 179–186. Taipei, Taiwan: PME.

Fast, M. (2016, in Druck). *Wie Kinder addieren und subtrahieren. Längsschnittliche Analysen in der Primarstufe.* Heidelberg, Wiesbaden: Springer Research.

Fuson, K. C., Wearne, D., Hiebert, J. C., Murray, H. G., Human, P. G., Olivier, A. I., Carpenter, T. P.& Fennema, E. (1997). Children's Conceptual Structures for Multidigit Numbers and Methods of Multidigit Addition and Subtraction. *Journal for Research in Mathematics Education, 28*(2), 130–162.

Hiebert, J., & Wearne, D. (1996). Instruction, Understanding, and Skill in Multidigit Addition and Subtraction. *Cognition and Instruction, 14*(3), 251–283.

Selter, C. (1999). Flexibles Rechnen statt Normierung auf Normalverfahren. *Die Grundschulzeitschrift* (Heft 125), 6–11.

Selter, C. (2000). Vorgehensweisen von Grundschüler(inne)n bei Aufgaben zur Addition und Subtraktion im Zahlenraum bis 1000. *Journal für Mathematik-Didaktik, 21*(3–4), 227–258.

Torbeyns, J., De Smedt, B., Ghesquière, P., & Verschaffel, L. (2009). Acquisition and use of shortcut strategies by traditionally schooled children. *Educational Studies in Mathematics, 71*(1), 1–17.

Torbeyns, J., Verschaffel, L., & Ghesquière, P. (2006). The Development of Children's Adaptive Expertise in the Number Domain 20 to 100. *Cognition and Instruction, 24*(4), 439–465.