Jan SCHUMACHER, Paderborn

Erkunden mathematischer Strukturen anstatt Interpretation in Modellen – Ein innermathematischer Zugang zu negativen Zahlen

In diesem Beitrag soll ein innermathematischer Zugang zu den negativen Zahlen vorgestellt werden, bei dem das Permanenzprinzip wieder in den Vordergrund rückt und in der Grundschule etablierte Aufgabenformate genutzt werden. Dazu werden vorab die Forschungsinteressen dargestellt, die mit der Entwicklung der Lernumgebung verknüpft sind. Abschließend werden erste Hypothesen, die bei der Sichtung der erhobenen Daten aufgestellt wurden, formuliert.

Forschungsinteressen

Die Lernumgebung ist im Rahmen eines Kooperationsprojektes mit der TU Dortmund entstanden. Im Projekt wird untersucht, welche Rolle lebensweltliche Kontexte beim Erlernen von negativen Zahlen spielen. Darüber hinaus wird im Rahmen meines Dissertationsprojekts untersucht, welche Vorstellungen Schüler bei einem innermathematischen Zugang zu negativen Zahlen entwickeln und inwieweit sich diese Vorstellungen in bestehende Konzepte einordnen lassen.

Entwicklung der Lernumgebung

Trotz der zu beobachtenden Tendenz, negative Zahlen in außermathematischen Kontexten einzuführen, finden sich in der einschlägigen Literatur gute Gründe für innermathematische Zugänge zu negativen Zahlen. Einerseits liegt die „mit negativen Zahlen verfolgte Intention […] klar im algebraischen Kalkül" (Jahnke 2003, S. 21) und andererseits werden im Alltag negative Zahlen nicht als eigenständige Denkobjekte genutzt, sondern es handelt sich bei ihnen nur um positive Zahlen mit einer anderen Interpretation (Hefendehl-Hebeker 1989, S. 11). Um die Relevanz außermathematischer Kontexte für das Lernen von negativen Zahlen zu untersuchen wurde im Rahmen der Studie eine Lernumgebung auf der Grundlage eines ausschließlich innermathematischen Zugangs zu negativen Zahlen entwickelt. Die Entwicklung der Lernumgebung basierte auf folgenden *Designprinzipien*:

- Vermeidung konstruierter außermathematischer Kontexte
- Betonung des Permanenzprinzips anhand eines innermathematischen Zugangs über Muster und Strukturen
- Förderung intuitiver Rechenwege

In Institut für Mathematik und Informatik Heidelberg (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2016* (S. x–y). Münster: WTM-Verlag

- Adäquater Gebrauch der Fachsprache

Zusammen verfolgen diese das Ziel algebraisches Denken zu fördern. Dabei wird auch an die Ideen von Rezat (2014), die Operation mithilfe von 1+1-Tafeln einzuführen, angeknüpft. Strukturell ist die Lernumgebung so aufgebaut, dass nach dem Einstieg in das Thema und der Behandlung der Ordnung der ganzen Zahlen die Strichrechnung in drei Teilen behandelt wird: 1) Subtraktion mit einem positiven Subtrahend, 2) Addition ganzer Zahlen und 3) Subtraktion mit negativem Subtrahend. Abschließend folgt die Multiplikation. Auf die Division ganzer Zahlen wird aufgrund der Vergleichsstudie verzichtet. Anstatt den Betrag einer Zahl einzuführen, bekommt der Begriff der Gegenzahl eine größere Gewichtung. Dabei soll das Rechnen mit ganzen Zahlen analog zum Rechnen mit natürlichen Zahlen in der Grundschule entwickelt werden.

Da die Schüler die Notwendigkeit von Zahlbereichserweiterungen am Beispiel der Bruchzahlen schon erfahren haben, werden sie zu Beginn der Lernumgebung mit der Problematik konfrontiert, dass die Subtraktion zweier Zahlen in den natürlichen Zahlen nicht vollständig durchführbar ist. Bei der Erarbeitung der Ordnung der ganzen Zahlen werden die Vorstellungen der Schüler zur Ordnung der natürlichen Zahlen aufgegriffen und deutlich gemacht, warum diese teilweise nicht mehr tragfähig sind („Es ist die Zahl kleiner, die näher bei der 0 steht.“). Die *Einführung der Rechenoperationen* erfolgt jeweils auf ähnliche Art und Weise. Die Schüler nähern sich der Operation mit den neuen Zahlen mithilfe von 1+1-, 1–1- oder 1•1-Tafeln an, wobei vorab durch schöne Päckchen eine Fokussierung auf bestimmte Strukturen stattfindet und gezielt die Operationen mit negativen Zahlen im Sinne des Permanenzprinzips aus dem Rechnen mit natürlichen Zahlen entwickelt werden können. Die Rechentafeln und die schönen Päckchen bieten den Schülern Möglichkeiten Muster und Strukturen zu entdecken und diese bei den Operationen mit den ganzen Zahlen fortzuführen. Die entdeckten Strukturen werden anschließend als Regel formuliert. Dadurch, dass die Schüler in innermathematischen „Zusammenhängen Strukturen und Formen erkennen“, „Gesetzmäßigkeiten des Operierens mit Zahlen […] erfassen“ und diese „Beziehungen und

a)	3 + 3	= ____	c)	1 + 2	= ____
	3 + 2	= ____		0 + 2	= ____
	3 + 1	= ____		-1 + 2	= ____
	3 + 0	= ____		-2 + 2	= ____
	3 + (-1)	= ____		-3 + 2	= ____
	3 + (-2)	= ____		-4 + 2	= ____
b)	1 + 2	= ____	d)	5 + 3	= ____
	1 + 1	= ____		3 + 3	= ____
	1 + 0	= ____		1 + 3	= ____
	1 + (-1)	= ____		-1 + 3	= ____
	1 + (-2)	= ____		-3 + 3	= ____
	1 + (-3)	= ____		-5 + 3	= ____

Abbildung 1: Schöne Päckchen bei der Einführung der Addition ganzer Zahlen

Gesetzmäßigkeiten […] schließlich begrifflich […] beschreiben“ (Hefendehl-Hebeker und Rezat 2015, S. 132), kann durch diesen Aufbau *algebraisches Denken* bei den Schülern gefördert werden (vgl. Abbildung 2).

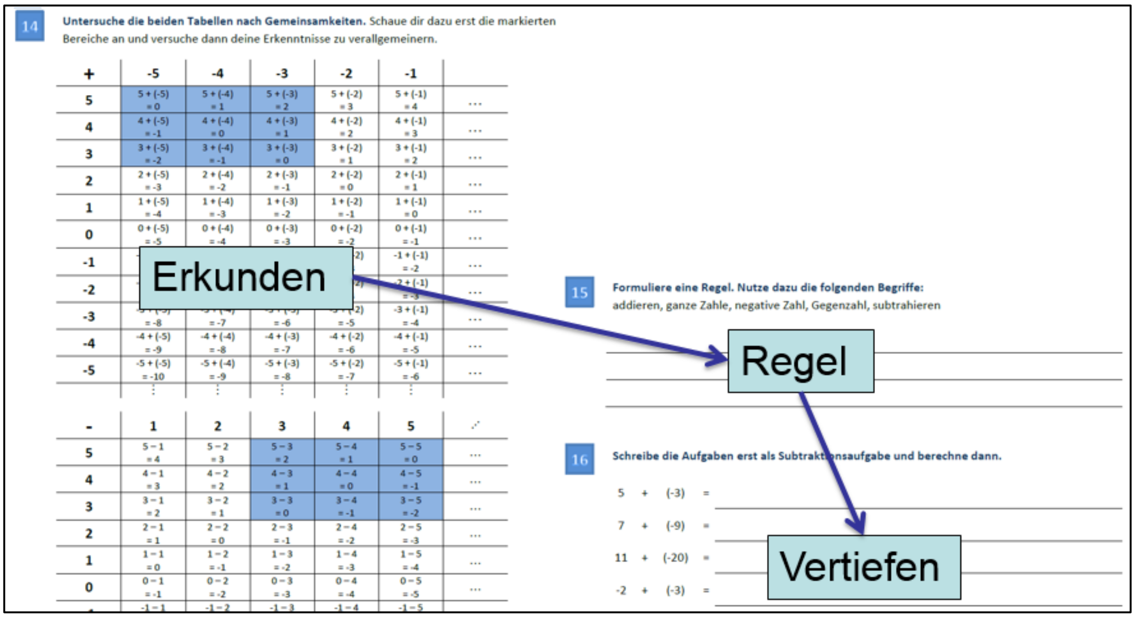

Abbildung 2: Ein beispielhafter Lernpfad

Intuitives Rechnen meint, dass die Schüler Aufgaben, bei denen die Operanden unterschiedliche Vorzeichen haben, so rechnen, wie es erfahrene Rechner machen würden. So würde z.B. im Guthaben-Schulden-Kontext, wenn die Summe aus einem Guthaben und einer Schuld bestimmt werden soll, geschaut, ob mehr Guthaben oder Schulden vorhanden sind und dann der jeweils kleinere vom jeweils größeren Betrag subtrahiert. Innermathematisch betrachtet bedeutet dass, dass anstelle Aufgaben der Art $3 + (-5) = -2$ die Aufgabe $3 – 5 = -(5 – 3) = -2$ berechnet werden.

Hypothesen und Ausblick

Nach der ersten Sichtung des Nachtests und den durchgeführten Interviews lassen sich unter Bezugnahme der Gespräche mit Schülern und Lehrern, die im Rahmen von Unterrichtshospitationen und wöchentlichen informellen Gesprächen erfolgt sind, schon jetzt drei Hypothesen formulieren:

1. Schüler können mit negativen Zahlen in außermathematischen Kontexten umgehen, auch wenn sie dieses nur in innermathematischen Kontexten kennengelernt haben.
2. Schüler operieren in außermathematischen Kontexten hauptsächlich mit positiven Zahlen.
3. Schüler wollen nicht nur in außermathematischen Kontexten arbeiten, sondern auch in der Welt der reinen Mathematik

Die erste Hypothese stützt sich auf die Daten, die im Nachtest erhoben wurden. Dort wurden die Schüler mit insgesamt vier Aufgaben konfrontiert, denen die außermathematischen Kontexte Guthaben-Schulden und Temperaturen zugrunde liegen. Nach Auswertung des Nachtests einer Klasse lässt sich feststellen, dass mehr als die Hälfte der Schüler mindestens drei dieser Aufgaben lösen konnten. In den geführten Interviews zeigt sich, dass Schüler in außermathematischen Kontexten hauptsächlich mit natürlichen Zahlen operieren und erst am Ende entscheiden, ob es sich beim Ergebnis um eine positive oder negative Zahl handeln muss. Schüler sollten benennen, ob Ihnen Aufgaben, die in inner- oder außermathematischen Kontexte eingekleidet sind, leichter gefallen sind. „Das hier [zeigt auf die Aufgabe in Abbildung 3] war die leichteste. […] Weil man da nicht so viel mit negativen Zahlen rechnen sollte. […] Das sind halt nur positive Zahlen“, antwortete eine Schülerin, was ein expliziter Beleg für diese Hypothese ist. Für die dritte gibt es zwar noch keine Belege, da die Analyse und Auswertung der vorhandenen Daten noch nicht abgeschlossen ist. Aufgrund der Eindrücke, die bei Unterrichtshospitationen, Gesprächen mit den Lehrkräften und ihren Schülern und der ersten Sichtung der Materialien aufgekommen sind, ist ein Nachweis aber sehr wahrscheinlich.

Till hat 15€ Schulden bei Anna. Er bekommt aber noch 11€ von Johannes und von seiner Oma 35€ geschenkt? Wie viel Geld hat er?

Abbildung 3: Aufgabe, die in den Interviews gelöst werden sollte

Es bedarf nun weiterer qualitativer und quantitativer Analysen um die ersten beiden Hypothesen weiter zu stärken und Belege für die dritte Hypothese zu finden, insbesondere, da diese im Fokus der zu Beginn formulierten Forschungsinteressen steht.

Literaturverzeichnis

Hefendehl-Hebeker, Lisa (1989): Die negativen Zahlen zwischen anschaulicher Deutung und gedanklicher Konstruktion. Geistige Hindernisse in ihrer Geschichte. In: *Mathematik lehren* (35), S. 6–13.

Hefendehl-Hebeker, Lisa; Rezat, Sebastian (2015): Algebra: Leitidee Symbol und Formalisierung. In: Regina Bruder, Lisa Hefendehl-Hebeker, Barbara Schmidt-Thieme und Hans-Georg Weigand (Hg.): Handbuch der Mathematikdidaktik. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, S. 117–148.

Jahnke, Hans Niels (2003): Numeri Absurdi Infra Nihil. Die negativen Zahlen. Sekundarstufe I, 7. Schuljahr. In: *Mathematik lehren* (121), S. 21–22.

Rezat, Sebastian (2014): Das Permanenzprinzip erfahren. An der 1 + 1-Tafel und der 1 x 1-Tafel das Rechnen mit negativen Zahlen erkunden. In: *Mathematik lehren* (183), S. 11–14.