Stephan BERENDONK, Bonn

10-adische Zahlen vom niederen Standpunkte aus

Wer schon einmal bis unendlich und darüber hinaus gezählt hat, der weiß: Es gibt auch Zahlen mit unendlich vielen Ziffern vor dem Komma. Solche „übernatürliche" Zahlen kann man addieren und multiplizieren, aber: Gelten dabei noch die gleichen Rechengesetze wie bei den natürlichen Zahlen? Wie steht es mit der Subtraktion, der Division, dem Potenzieren und dem Wurzelziehen? Gibt es hier exotische Phänomene zu entdecken? Wir wollen diese Fragen durch konkretes Rechnen an Beispielen beantworten. So verschaffen wir uns gewissermaßen durch eine Seitentür, nämlich durch eine Abwandlung der natürlichen Zahlen, einen bescheidenen Einblick in ein Zahlenreich, das man üblicherweise über den theoriebewachten Haupteingang, nämlich über die Abwandlung der reellen Zahlen, betritt.

10-adische Zahlen als genetische Mutation der natürlichen Zahlen

Was passiert eigentlich beim schriftlichen Subtrahieren zweier natürlicher Zahlen, wenn der Subtrahend größer ist als der Minuend? Schauen wir uns ein Beispiel an:

$$\begin{array}{rr} & 0000002635 \\ & 0_1 0_1 0_1 0_1 0_1 0_1 4\,3_1 6\,2\;- \\ \hline \ldots & 9999998273 \end{array}$$

Das Verfahren findet kein Ende. Es entsteht nach links hin eine endlose Kette von Neunen. Als Differenz der beiden natürlichen Zahlen erhalten wir also eine „Zahl", die aus unendlich vielen Ziffern besteht, einen „Mutanten". Diese Beobachtung inspiriert uns dazu mit (unendlichen) Ziffernfolgen zu rechnen, nämlich, indem wir die schriftlichen Rechenverfahren für die Addition und die Multiplikation natürlicher Zahlen auch auf (unendliche) Ziffernfolgen anwenden. Auf diese Weise werden die (unendlichen) Ziffernfolgen zu Zahlen, den sogenannten *10-adischen Zahlen*.

Fragen zum Wesen der Mutanten

Wir starten nun eine Erkundung der 10-adischen Zahlen. Was brauchen wir dazu? Vor allem Eines: Fragen, denen wir nachgehen können. Aber wie kommt man zu konkreten Fragen? Da die neuen Zahlen als Mutation der natürlichen Zahlen entstanden sind, liegt es nahe sie zunächst mit den natürlichen Zahlen zu vergleichen. Sobald Unterschiede zu den natürlichen Zahlen auftreten, lohnt sich auch ein Vergleich mit den anderen uns bekannten Zahlsystemen. Wir gehen daher (in Gedanken) alle Begriffe und

In Institut für Mathematik und Informatik Heidelberg (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2016* (S. x–y). Münster: WTM-Verlag

Operationen, die wir von den natürlichen, ganzen, rationalen oder reellen Zahlen kennen, durch und stellen Fragen wie: Gibt es bei den 10-adischen Zahlen auch Primzahlen, eine Primfaktorzerlegung, Teilbarkeitsregeln? Können wir bei den 10-adischen Zahlen auch Dividieren, Wurzelziehen, Gleichungen lösen? Gilt bei den 10-adischen Zahlen auch das Kommutativ-, Assoziativ-, Distributivgesetz? Was können wir über die periodischen Zahlen aussagen? Was passiert, wenn wir nur 0 und 1 als Ziffern zulassen? Können wir die Zahlen der Größe nach ordnen? Was passiert, wenn wir auch Nachkommastellen zulassen?

Die Rechengesetze als Erbe der natürlichen Zahlen

Wenn wir an einem Beispiel überprüfen möchten, ob das Kommutativgesetz der Multiplikation gilt, dann stehen wir vor einem Problem, da es sich bei der schriftlichen Multiplikation 10-adischer Zahlen um einen unendlichen Prozess handelt. Das Produkt der beiden gewählten Faktoren werden wir, sofern keine Regelmäßigkeit auftritt, nie als Ganzes ausrechnen können. Wir werden durch Rechnen immer nur ein (beliebig langes) Endstück des Produkts in Erfahrung bringen können. Eine „empirische“ Überprüfung des Kommutativgesetzes bleibt uns somit verwehrt. Allerdings wird bei der Betrachtung solch einer Rechnung klar, dass die letzten *n* Ziffern des Produkts allein durch die letzten *n* Ziffern der beiden Faktoren festgelegt sind; sie sind identisch mit den letzten *n* Ziffern des Produkts der beiden natürlichen Zahlen, die von den letzten *n* Ziffern der beiden Faktoren gebildet werden. Mit dieser Einsicht folgt nun das Kommutativgesetz der Multiplikation 10-adischer Zahlen direkt aus dem entsprechenden Gesetz für natürliche Zahlen. Auf die gleiche Weise werden auch die anderen Rechengesetze der natürlichen Zahlen vererbt.

Ähnlichkeiten zum endlichen Bruder ($\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$)

Es gilt: $\ldots 0001 + \ldots 9999 = \ldots 0000$. Anders als bei den natürlichen Zahlen hat das neutrale Element der Multiplikation also ein additives Inverses. Tatsächlich haben sogar alle 10-adischen Zahlen ein additives Inverses. Die 10-adischen Zahlen bilden somit einen kommutativen Ring. Haben wir es hier möglicherweise gar mit einem Körper zu tun? Nein, 10-adische Zahlen, die auf einer geraden Ziffer enden, können keinen 10-adischen Kehrwert haben, da das Produkt der Zahl mit dem hypothetischen Kehrwert ebenfalls auf einer geraden Ziffer enden wird, sodass das Produkt offensichtlich nicht $\ldots 0001$ sein kann. Analog können wir zeigen, dass auch 10-adische Zahlen, die auf einer 5 enden, „kehrwertfrei“ sind. Dass alle anderen 10-adischen Zahlen tatsächlich einen und zwar genau einen Kehrwert haben, erkennen wir bei einem Versuch die (letzten) Ziffern des (zunächst hypothetischen) Kehrwerts von (beispielsweise) $\ldots 0007$ schrittweise zu bestimmen. Für die letzte, vorletzte, vorvorletzte,… Ziffer des zu bestimmenden Kehrwerts finden wir dann aufgrund der Tatsache, dass in der 7er-Reihe (**0**, **7**, 1**4**, 2**1**, 2**8**, 3**5**, 4**2**, 4**9**, 5**6**, 6**3**) jede Ziffer genau einmal als Endziffer vorkommt, immer genau einen passenden Kandidaten. Die Umkehrbarkeit einer 10-adischen Zahl richtet sich also nach der Umkehrbarkeit ihrer Endziffer in $\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$.

Wir geben die Zahl 5 in den Taschenrechner ein und drücken danach wiederholt die Quadrattaste. Das liefert uns die folgenden Zahlen: 5, 25, 625, 390625, 152587890625, 23283064365386962890625,… Beim „Durchlaufen“ der Folge mag uns auffallen, dass sich die hinteren Ziffern der einzelnen Folgeglieder nicht mehr verändern und, dass sich die Grenze dieser „Sättigung“ stets weiter nach links verschiebt. Diese Beobachtung führt uns zu der Frage, ob es womöglich eine von Null und Eins verschiedene 10-adische Zahl gibt, die ihr eigenes Quadrat ist. In $\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$ gibt es ja immerhin zwei solche Elemente: 5 und 6. Und tatsächlich, bei einem Versuch die letzte, vorletzte, vorvorletzte,… Ziffer einer 10-adischen Zahl mit dieser Eigenschaft zu bestimmen, erkennen wir: Es gibt genau zwei nicht-triviale 10-adische „Selbstquadrate“, eins mit Endziffer 5 und eins mit Endziffer 6.

Lernen vom „rechten“ Nachbarn $\mathbb{R}$

10-adische Zahlen bestehen aus unendlich vielen Ziffern. Das ist natürlich kein Alleinstellungsmerkmal. Auch für die reellen Zahlen gilt das. Die 10-adischen Zahlen stellen wir nach links hin fortlaufend dar, die reellen Zahlen nach rechts hin. Die periodischen reellen Zahlen können wir als Bruch von zwei ganzen Zahlen schreiben. Wie steht es mit den periodischen 10-adischen Zahlen? Versuchen wir es doch mit dem gleichen „Trick“ wie bei den reellen Zahlen: Periode nach vorne ziehen um sie anschließend loszuwerden. Das sieht dann bei den 10-adischen Zahlen beispielsweise wie folgt aus: $A = \cdots\overline{758241}$. Also: $1000000 \cdot A = \cdots\overline{758241}000000$. Also: $-999999 \cdot A = \ 758241$ und schließlich: $A = -75824/999999$. So lässt sich jede periodische 10-adische Zahl als Bruch von zwei ganzen Zahlen schreiben. Kann ein solcher Bruch auch positiv werden?

Lokales Ordnen als Alternative zum Rechnen

Wir haben gesehen, dass man eine ganze Reihe von Erkenntnissen über die 10-adischen Zahlen auf einfache rechnerische Weise, d.h. mit Hilfe der Durchführung oder beim Betrachten einer Rechnung gewinnen kann. Tieferen Einblick in die Struktur dieser Zahlen erhalten wir aber wohl nur, wenn wir beginnen Verwandtschaften zwischen verschiedenen Sachverhalten durch deduktives Schließen aufzudecken, indem wir also *lokales Ordnen* betreiben. Schon bei den bisher angesprochenen Fragen bieten sich hierfür viele Gelegenheiten. Wir geben vier Beispiele:

1. Beim Berechnen der Ziffern des Kehrwertes einer umkehrbaren 10-adischen Zahl haben wir festgestellt, dass es immer genau einen passenden Kandidaten für die nächste zu berechnende Ziffer gibt. Somit ist der Kehrwert der Zahl eindeutig. Wir können diese Tatsache aber natürlich auch wie üblich aus dem Assoziativgesetz der Multiplikation folgern.

2. Dass $\dots 9999 \cdot \dots 9999 = \dots 0001$ gilt, können wir einerseits rechnerisch nachweisen, indem wir die Regelmäßigkeit der Überträge bei der schriftlichen Multiplikation erkennen. Andererseits können wir die Tatsache auch aus dem Distributivgesetz folgern: $\dots 9999 \cdot \dots 9999 + \dots 9999 = (\dots 9999 + \dots 0001) \cdot \dots 9999 = 0$.

3. Mit der Existenz nicht-trivialer 10-adischer Zahlen, die ihr eigenes Quadrat sind, geht einher, dass die Menge der 10-adischen Zahlen Nullteiler enthält: Sei $a \neq 0{,}1$ mit $a^2 = a$. Dann: $a \cdot (a-1) = 0$.

4. Mit Hilfe dieses Nullteilers a können wir ferner folgern, dass es, übrigens diesmal im Unterschied zu $\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$, neben -1 und 1 noch weitere 10-adische Zahlen gibt, deren Quadrat gleich 1 ist: Da $a \cdot (a-1) = 0$ gilt auch: $(2a)(2a-2) = 0$. Sei $b := 2a - 1$. Dann gilt: $(b+1)(b-1) = 0$. Also: $b^2 = 1$.

Fazit

Das Abwandeln der natürlichen Zahlen und anschließende Vergleichen mit ebendiesen erlaubt einen frischen Blick auf die natürlichen Zahlen selbst, insbesondere auf die schriftlichen Rechenverfahren.

Die 10-adischen Zahlen (als „genetischer Mischling“ der natürlichen, rationalen und reellen Zahlen sowie des Restklassenrings $\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$) bilden einen reichen Kontext für Erkundungen, einen Kontext im Sinne von *Arithmetik als Prozess* (vgl. Müller, Wittmann, Steinbring).

Die wesentliche Aufgabe von Restklassen in Lehramtsvorlesungen zur Arithmetik scheint zu sein, den Begriff des Rings mit Inhalt zu füllen. Die 10-adischen Zahlen könnten sie bei dieser Aufgabe entlasten oder gleichwertig ersetzen.

Literatur

Rich, A. (2008). Leftist Numbers. *The College Mathematics Journal*, *5*, 330–336.

van den Broek, L. & van Rooij, A. (2009). *Getallenbrouwerij - alternatief rekenen*. Amsterdam: Epsilon-Uitgaven.