

Lisa GÖBEL, Bärbel BARZEL, Essen

## **Vergleich verschiedener dynamischer Visualisierungen zur Konzeptualisierung von Parametern bei quadratischen Funktionen**

### **Hintergrund**

Viele Studien zeigen, dass durch den Einsatz von Technologien das Lernen von Mathematik unterstützt werden kann, aber auch neue Herausforderungen entstehen. Dieses Projekt geht der Frage nach, inwiefern es Unterschiede im Verständnis von Parametern bei quadratischen Funktionen in Abhängigkeit vom Einsatz verschiedener dynamischer Visualisierungen gibt.

Von einem tragfähigen Verständnis zu Parametern bei quadratischen Funktionen kann dann gesprochen werden, wenn die Lernenden die Vorstellungen zu den Funktionen und den Variablen tragfähig aufgebaut haben.

Bei Funktionen wird zwischen drei Grundvorstellungen unterschieden: Zuordnung, Kovariation und Objekt als Ganzes (Malle, 2000).

Für ein tragfähiges Verständnis müssen alle drei Vorstellungen ausgebildet werden. Zusätzlich wird dieses Verständnis durch die Variablen in den Funktionsgleichungen beeinflusst, die situationsspezifisch im Sinne der Grundvorstellungen der Variablen gedeutet werden müssen. Diese wurden bereits oft klassifiziert (vgl. z.B. Malle, 1993). Drijvers (2001) expliziert zusätzlich verschiedene Rollen von Parametern. Er unterscheidet folgende relevante Vorstellungen von Parametern: Platzhalter, generalisierte Zahl und Veränderliche. Konkret bedeutet dies: Wenn man den Parameter  $a$  in  $y=a*x+b$  als Platzhalter sieht, steht  $a$  für je einen spezifischen Wert mit einem dazu passenden Graphen, der sich verändert, wenn für  $a$  ein anderer Wert eingesetzt wird. Wird der Parameter  $a$  als Veränderliche angesehen, bewegt sich  $a$  hingegen dynamisch durch eine Menge von Werten und das graphische Modell ist ein „Film der Graphenveränderung“ (Drijvers, 2001).

Der Aufbau dieser Vorstellungen kann gezielt durch den Wechsel von Repräsentationen geschehen, der auch als Schwelle zum mathematischen Verständnis aufgefasst wird (Duval, 2006). Dieser bedeutsame Wechsel zwischen den Repräsentationen kann durch Technologie unterstützt werden (Penglase & Arnold, 1996). Allerdings scheint auch genau diese Unterstützung zu (neuen) Herausforderungen zu führen. So fragen sich Zbiek et al. (2007), ob Schieberegler die Erkenntnis vom Zusammenhang zwischen der

Veränderung des Parameters und der Veränderung am Graph aufgrund ihrer Schnelligkeit nicht verschleiern statt hervorzuheben.

Im Fokus des hier vorgestellten Projektes liegt die Frage, welche Rolle Schieberegler im Vergleich zu anderen Visualisierungen beim Erlernen der Rolle der Parameter in der Scheitelpunktform quadratischer Funktionen einnehmen. Dazu arbeiteten drei Experimentalgruppen mit unterschiedlichen Visualisierungen in der TI-Nspire CX CAS App für Ipad, während die Kontrollgruppe nur mit wissenschaftlichen Taschenrechnern ohne Graphikfähigkeit arbeitete. Bezogen auf die vorgegebenen Visualisierungen unterschieden sich die Gruppen wie folgt: Die Funktionenplotter-Gruppe hatte lediglich das digitale Werkzeug zur Verfügung. Die Lernenden konnten sich also nach Belieben Funktionen und dazu die jeweilige Wertetabelle anzeigen lassen. Die Zugmodus- und Schieberegler-Gruppen hatten vorprogrammierte Dateien, wo bereits die Normalparabel und die dynamisch verlinkte Wertetabelle voreingestellt war. In der Zugmodus-Gruppe konnten die Lernenden den Graphen „anpacken“, um Form und Lage der Parabel zu variieren. Bei der Schieberegler-Gruppe erfolgte das Variieren mittels voreingestellter Schieberegler. Die Kontrollgruppe konnte sich Wertetabellen anzeigen lassen, jedoch keine Graphen zeichnen lassen, dies musste per Hand geschehen.

Der Hauptfokus des Projektes kann durch folgende Frage konkretisiert werden: Inwieweit können Lernprozesse von Schülerinnen und Schülern zur Bedeutung von Parametern bei quadratischen Funktionen rekonstruiert werden, unter Berücksichtigung von Herausforderungen im Lernprozess und Beliefs?

In diesem Artikel werden erste Ergebnisse aus dem Forschungsprojekt vorgestellt.

## Design der Studie und Materialien

Zur Beantwortung der Forschungsfrage wurde eine Kontroll-Gruppen-Design Studie mit 14 Klassen der Jahrgangsstufe 9 durchgeführt. Insgesamt nahmen 379 Schülerinnen und Schüler von Gymnasien teil.

Die Studie beinhaltet einen Pre- und Posttest, sowie eine dreistündige Intervention. Abbildung 1 gibt einen Überblick über das Design der Studie.

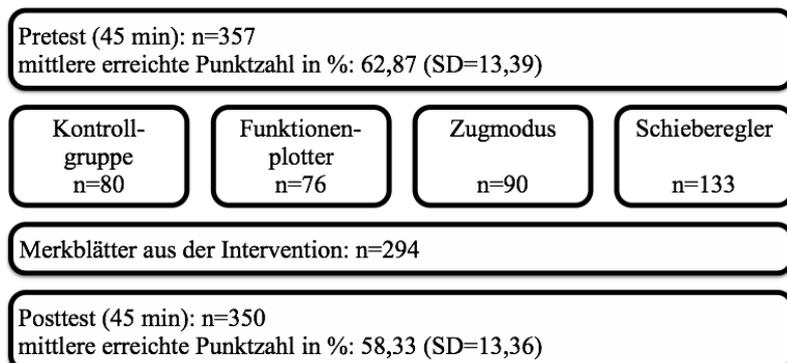


Abbildung 1: Übersicht über die Studie

Die einzelnen Teile der Studie sind wie folgt aufgebaut:

*Pretest:* Im Pretest wurde das Wissen der Jahrgangsstufe 8 im Kontext der linearen Funktionen mit offenen und single-choice Aufgaben als Baseline erhoben, um die einzelnen Klassen zu vergleichen.

*Intervention:* In der Intervention sollen die Lernenden möglichst selbsttätig das Konzept der Parameter erlernen. Die Interventionsaufgabe war für alle Experimental- und Kontrollgruppen gleich. Der Designprozess war empirisch fundiert und die Interventionsaufgabe ist wie folgt strukturiert: Zunächst sollte ein Beispiel beschrieben werden, dann verschiedene Werte für die einzelnen Parameter in der Scheitelpunktform untersucht werden, anschließend Begründungen gefunden und zuletzt ein Merkblatt mit allen Ergebnissen erstellt werden.

Während der Intervention wurden alle Schülerinnen und Schüler bei der Bearbeitung beobachtet und 13 Fokusgruppen bei der Bearbeitung gefilmt. Alle Schülerinnen und Schüler haben zudem Merkblätter zum Thema erstellt.

*Posttest:* Nach der Intervention wurde ein Posttest durchgeführt. In diesem Test wurden die Themen der Intervention überprüft, um den Lernerfolg zu erheben. Der Test war zudem über 6 Ankeritems mit dem Pretest verbunden. Sowohl im Pretest als auch im Posttest lag der Fokus auf den erworbenen Vorstellungen und nicht auf der technischen Bedienkompetenz, deshalb fanden beide Tests technologiefrei statt.

Die Videoaufnahmen, Beobachtungen und Merkblätter aus der Intervention bilden den Schwerpunkt der interpretativen, qualitativen Analyse. Die quantitative Auswertung der Tests kann für weitere Befunde genutzt werden.

### **Erste Ergebnisse und Ausblick**

In der Intervention wurde festgestellt, dass viele Schülerinnen und Schüler versuchen, die Begriffe aus dem Bereich der linearen Funktionen (z.B. y-Achsenabschnitt, Steigung) auf die quadratischen Funktionen zu übertragen. Neben technischen Verwirrungen in der Zugmodus-Gruppe wurde außerdem beobachtet, dass in den beiden anderen Experimentalgruppen zu wenige Funktionen betrachtet wurden, um alle Veränderungen der Parabeln zu erkennen.

Erfreulicherweise wurden in den drei Experimentalgruppen häufig alle Veränderungen durch die drei Parameter in der Scheitelpunktform erkannt. Während in der Kontrollgruppe nur 21 von 35 Gruppen (60%) alle Veränderungen erkannt haben, waren es in der Funktionenplotter-Gruppe 23 von 32 Gruppen (71%), bei der Zugmodus-Gruppe 36 von 43 Gruppen (83%) und bei der Schieberegler-Gruppe 59 von 64 Gruppen (92%). Insbesondere der

Schieberegler scheint nützlich zu sein, alle Veränderungen durch die drei Parameter zu erkennen. Die Vermutung von Zbiek et al. (2007) war, dass der Schieberegler für das Lernen der Bedeutung von Parametern nicht geeignet ist. Dies konnte in der hier vorgestellten Studie nicht bestätigt werden. Vielmehr scheint gerade der Moduswechsel vom Schieberegler zum Graphen förderlicher zu sein, die Beziehung zwischen Parameter im Term und Graphveränderung zu verstehen als das unmittelbare Ziehen am Graphen selbst ohne Moduswechsel.

Eine häufig über alle Gruppen auftretende Fehlvorstellung war, dass bei einer Verschiebung der Parabel nach oben die Parabel enger wird. Diese Fehlvorstellung wurde erfreulicherweise aber fast immer im Lauf der Intervention noch innerhalb der Gruppenarbeit revidiert. Bei einigen Paaren von Schülerinnen und Schülern wurde die Fehlvorstellung erst mehrere Minuten nach der Äußerung oder sogar erst beim eigenen Korrekturlesen der aufgeschriebenen Ergebnisse revidiert. In den Zugmodus- oder Schieberegler-Gruppen geschah die Revidierung durch erneute Visualisierung, meist bereits direkt im Anschluss an die Äußerung der Fehlvorstellung.

Im weiteren Verlauf des Projektes soll durch eine tiefere qualitative Analyse der Videos und der Merkblätter versucht werden, Lernprozesse der Schülerinnen und Schüler zu rekonstruieren, um eventuelle Unterschiede, die durch die Visualisierungen bedingt sind, besser verstehen zu können.

## Literatur

- Drijvers, P. (2001). The concept of parameter in a computer algebra environment. In Heuvel-Panhuizen, M. van den (Hrsg.): *Proc. 25th Conf. of the Int. Group for the Psychology of Mathematics Education. Vol. 2*. Utrecht, Netherlands: PME, 385-392.
- Duval, R. (2006) A Cognitive Analysis of Problems of Comprehension in a Learning of Mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 61(1), 103-131.
- Malle, G. (1993). *Didaktische Probleme der elementaren Algebra*. Braunschweig, Wiesbaden: Vieweg.
- Malle, G. (2000) (Hrsg.) Funktionen untersuchen. *Mathematik lehren* 103. Seelze: Friedrich Verlag.
- Penglase, M. & Arnold, S. (1996). The graphics calculator in mathematics education: a critical review of recent research. *Mathematics Education Research Journal* 8(1), 58-90.
- Zbiek, R. M., Heid, M. K., Blume, G. W., & Dick, T. P. (2007). Research on Technology in Mathematics Education – A Perspective of Constructs. In F. Lester (Hrsg.): *Second Handbook of research on mathematics teaching and learning*. Charlotte, NC: Information Age, 1169-1207.