Petra HAUER-TYPPELT, Wien

Problemlösen mit den Mathe-Fans

In diesem Beitrag wird nach einer Vorstellung des Kurses „MFU – Mathe-Fans an die Uni“ über eine gemeinsam mit Studierenden durchgeführte Studie zum Themenbereich Problemlösen im Rahmen des Kurses berichtet.

MFU – Eckdaten und Schwerpunkte des Kurses

„MFU - Mathe-Fans an die Uni“ ist ein Angebot, das sich an mathematisch interessierte Schülerinnen und Schüler der gymnasialen Unterstufe richtet. Erstmals 2008 durchgeführt, findet der Kurs seither regelmäßig an der Fakultät für Mathematik der Universität Wien statt. Pro Semester finden je zwei Kurse für zwei unterschiedliche Schulstufen statt. In zweiwöchigem Rhythmus gibt es für die Teilnehmer Gelegenheit sich mit mathematischen Aufgaben und Themen zu beschäftigen.

Inhaltsschwerpunkte bilden dabei einerseits Problemlöseaufgaben aus unterschiedlichen Themengebieten andererseits attraktive Themen, die im regulären Schulunterricht keinen Platz finden, z. B. das Thema Geheimschriften im Kurs für die 5. Schulstufe. Im Sinne der Altersadäquatheit handelt es sich bei den Problemlöseaufgaben in den Kursen für die 5. und 6. Schulstufe, die in diesem Beitrag im Fokus stehen, in der Regel um Problemlöseaufgaben mit klarer Zielstellung, deren Bearbeitung bzw. Lösung aber auf unterschiedliche Weise erfolgen kann. Um sowohl der Kreativität des Problemlösens als auch den unterschiedlichen Voraussetzungen der Teilnehmer gerecht zu werden, wird mit vergleichsweise anspruchsvollen Aufgaben gearbeitet, bei denen man aber auch mit Teillösungen erfolgreich sein kann. Begründen und Argumentieren spielen – altersgemäß immer im Zusammenhang mit eigenen Ergebnissen bzw. zumindest Teilergebnissen – eine zentrale Rolle.

Aufgabenbeispiele und Kursziele

Um einen konkreteren Einblick in die Kursinhalte zu geben, folgen drei, hier nicht zuletzt wegen ihrer Kürze ausgewählte Aufgabenbeispiele, die bevorzugt im Kurs für die 6. Schulstufe verwendet werden.

Aufgabe Diagonalen im Vieleck: Rechts siehst du ein regelmäßiges Achteck, in dem alle Diagonalen eingezeichnet sind. *(Anm.: Die Abbildung entfällt hier aus Platzgründen.)* a) Wie kann man die Anzahl der Diagonalen im regelmäßigen Achteck berechnen? b) Versuche nun eine Formel zu entwickeln, mit der man die Anzahl der Diagonalen in einem regelmäßigen n-Eck berechnen kann!

In Institut für Mathematik und Informatik Heidelberg (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2016* (S. x–y). Münster: WTM-Verlag

Schokoladeaufgabe – Die Schokolade wird mir dein Alter verraten: Wie oft in der Woche möchtest du Schokolade essen? Wähle eine Zahl zwischen 0 und 10. Multipliziere die Zahl mit 2. Addiere 5. Multipliziere das Resultat mit 50. Wenn du im Jahr 2016 schon Geburtstag hattest, dann addiere 1766. Wenn nicht, dann addiere 1765. Jetzt zieh dein Geburtsjahr ab. Du erhältst eine dreistellige Zahl: Die erste Ziffer zeigt, wie oft du Schokolade essen möchtest. Und die verbleibende Zahl ist dein Alter! Warum funktioniert dieser „Trick" immer?

Aufgabe Teilbarkeit: Es gibt Zahlen, die beim Dividieren durch 2, 3, 4, 5 und 6 den Rest 1 ergeben, aber durch 7 teilbar sind. Finde eine solche Zahl! Gibt es mehrere solcher Zahlen? (Quelle: Käpnick, 2014, S. 110)

Was MFU den Teilnehmern also bieten möchte, ist eine Schulung des mathematischen Denkens, insbesondere durch eine Auseinandersetzung mit Strategien und Methoden zum mathematischen Problemlösen, die wiederum im Sinne der Metakognition Wissen über mathematisches Denken mit sich bringt. Diese Punkte sind es auch, die in der fachdidaktischen Literatur als wesentliche Einflussfaktoren auf die Qualität des Problemlösens genannt werden, siehe z. B. Heinrich et al. (2015, S. 289). Dort werden als weitere Einflussfaktoren fachliches Bereichswissen und Einstellungen bzw. Grundhaltungen genannt. In diesen beiden Bereichen bringen die Kursteilnehmer in der Regel hervorragende Voraussetzungen mit, was zum einen ihre weitere Förderung im Sinne einer positiven Aufwärtsspirale im Vergleich zum Regelunterricht leicht macht, zum anderen MFU als „Forschungslabor" zum Themenbereich Problemlösen für angehende Mathematiklehrerinnen und – lehrer prädestiniert.

Beobachten und Analysieren von Problemlöseprozessen – Motivation für eine Studie gemeinsam mit Studierenden

Als Lehrerbildnerin ist es mir ein zentrales Anliegen Studierende für einen Mathematikunterricht auszubilden, in dem Problemlösen tatsächlich seinen Platz bekommt. Das theoretische Wissen der Studierenden um die Bedeutung der Vermittlung von Problemlösekompetenz scheint in vielen Fällen gut gesichert, dennoch findet dieser wichtige Bereich des Lernens den Weg in die Klasse oft nicht (mehr), wenn es an den realen Schulalltag geht. Um Studierenden Gelegenheit zu geben, lehr- und lerntheoretische Überlegungen zum Problemlösen praktisch umzusetzen, wurden mit zwei Seminargruppen in zwei aufeinanderfolgenden Jahren Problemlöseprozesse im MFU-Kurs beobachtet und im Seminar analysiert. Neben den beabsichtigten positiven Einflüssen insbesondere auf die Haltung der angehenden Lehrerinnen und

Lehrer brachten die zahlreichen Beobachtungsprotokolle Teilerkenntnisse und Vermutungen, die zu einer strukturierteren Studie motivierten.

Einsatz von strukturverwandten Aufgaben

Zum Zweck eines konkreten Beobachtungskonzeptes wurde in dieser Studie, aus der auch eine Bachelorarbeit hervorging, mit so genannten strukturverwandten Aufgaben gearbeitet: Problemlöseaufgaben, die sich mit derselben Problemlösestrategie sehr gut bearbeiten bzw. lösen lassen, werden als strukturverwandte Aufgaben bezeichnet. Die Strukturverwandtheit bezieht sich also nicht auf Aufbau oder Kontext der Aufgaben. Strukturverwandte Aufgaben können auf den ersten Blick unterschiedlich wirken, erst wenn – in der Diktion der klassischen Arbeitsphasen nach Pólya – Phase 1 (Verstehen der Aufgabe) bewerkstelligt ist, kann die Strukturverwandtheit in der Phase 2 des Problemlöseprozesses erkannt und in weiterer Folge genutzt werden.

Studiendesign und Ergebnisse

Insgesamt kamen zu den drei Problemlösestrategien „Rückwärtsarbeiten", „Systematisches Probieren" und dem „Invarianzprinzip" (siehe Bruder & Collet, 2011, S. 68 ff. oder Posamentier & Krulik, 1998) acht verschiedene Aufgaben zum Einsatz. Jeder der drei Strategien wurde jeweils ein Kurstermin der 6. Schulstufe gewidmet, in dem die strukturverwandten Aufgaben im Wechselspiel mit völlig anderen Aufgaben bearbeitet wurden.

Im Fokus der Beobachtungen standen „Verwendete Problemlösestile" und „Transferleistungen bezüglich Problemlösestrategien" der Kinder. Die Problemlösestile wurden literaturbasiert, in Anlehnung an Käpnick (2014, S. 119 ff.) typisiert: hartnäckiges Probieren – abwechselndes Probieren und Überlegen – intuitives Erahnen bzw. Herantasten an eine Lösung – systemhaftes, überlegtes Vorgehen – Mischtyp

Die oben erwähnten, vorangegangenen Analysen zeigten die gute Passung der Typen und machten daher eine grundsätzlich immer zu überlegende empirisch basierte Änderung oder Erweiterung der Typen nicht notwendig. Bezüglich der Transferleistungen wurde eine Einteilung in drei Stufen vorgenommen: Stufe 1: keine Transferleistung erkennbar; Stufe 2: Erkennen der Strukturverwandtheit, aber kein erfolgreicher Transfer der Problemlösestrategie; Stufe 3: Erfolgreicher Einsatz bereits bekannter Problemlösestrategien

Selbstverständlich ist mit der Stufen- bzw. Typenzuteilung eines Lösungsweges nicht zwingend eine Wertung verbunden. Beispielsweise kann eine Vorgehensweise, die naheliegende, nachweislich bekannte Problemlösestrategien nicht nutzt und daher der Stufe 1 zuzuordnen ist, sehr hochwertig hinsichtlich Kreativität sein.

Insgesamt wurden in der Studie 138 Lösungswege analysiert, die alle in schriftlicher Form vorlagen, teilweise ergänzt durch mündlich erfragte Informationen. In der Kategorie Problemlösestile zeigte sich in dieser Gruppe erwartungsgemäß ein hoher Anteil des Typs „systemhaftes, überlegtes Vorgehen". Der außerhalb der Studie im Kurs oft beobachtbare Problemlösestil „intuitives Erahnen" einer Problemlösung trat selten auf. Dies ist aber dem Design geschuldet, das ja auf das Erkennen von Strukturverwandtheit setzt. Herausgegriffen seien noch vier häufig beobachtete Vorgehensweisen, die offensichtlich gute Problemlöser auszeichnen, da diese im Vergleich zu anderen Merkmalen auch im Regelunterricht einfach zu berücksichtigen bzw. zur Entwicklung zu bringen sind: Die Teilnehmer zeigten eine hohe natürliche Bereitschaft zur Validierung von Zwischenergebnissen, gingen unbekümmert und damit schnell sicher werdend mit neuen Begriffen um, widmeten sich unbeirrt eigenen, phantasiereichen Lösungswegen und ließen sich von gescheiterten Lösungsversuchen kaum demotivieren.

In der Kategorie Transferleistung erreichten 20 der 24 Teilnehmer an der Studie bei mindestens einer Aufgabe Stufe 3, bei lediglich zwei Kindern war ein Erkennen der Strukturverwandtheit von Aufgaben nie festzustellen. (vgl. Kittler, 2016, S. 79 f.) Die deutlichsten Übertragungsleistungen zeigten sich bei den strukturverwandten Aufgaben zum systematischen Probieren. Die Ergebnisse bestärken zur Arbeit mit strukturverwandten Aufgaben auch in Regelklassen, wenn es um die Entwicklung von Problemlösestrategien geht. Die Problemlösestrategie „Systematisches Probieren" dabei als eine der ersten in den Fokus zu nehmen, trägt bei, Schüler schon zu Beginn zu Erfolgserlebnissen kommen lassen – ein zentraler Faktor zum Aufbau bzw. Erhalt der Motivation, ohne die erfolgreiches Problemlösen nicht stattfinden kann.

Literatur

Bruder, R. & Collet, C. (2011): *Problemlösen lernen im Mathematikunterricht.* Berlin: Cornelsen Scriptor.

Heinrich, F. et al. (2015): Problemlösen lernen. In R. Bruder et al. (Hrsg.): *Handbuch der Mathematikdidaktik* (S. 279-301). Berlin, Heidelberg: Springer Spektrum

Käpnick, F. (2014): *Mathematiklernen in der Grundschule.* Berlin, Heidelberg: Springer Spektrum.

Kittler, J. (2016): *Strukturverwandte mathematische Problemstellungen und Aufgaben. Eine Potenzialanalyse hinsichtlich der Förderung mathematischer Kompetenzen.* Bachelorarbeit an der KPH Wien/Krems.

Pólya G.(2010): *Schule des Denkens. Vom Lösen mathematischer Probleme.* Tübingen: Narr Francke Attempto. (Sonderausgabe der 4. Auflage der Originalausg. von 1949)

Posamentier, A. & Krulik, S. (1998): *Problem-solving strategies for efficient and elegant solutions.* Thousand Oaks, California: Corwin Press.