

Gilbert GREEFRATH; Corinna HERTLEIF, Münster

Mathematisches Modellieren mit digitalen Werkzeugen – Eine Fallstudie mit Dynamischer Geometrie-Software

Digitale Werkzeuge können im Unterricht von Anwendungen und Modellierungen unterschiedlichste Aufgaben übernehmen. Sie können zum Beispiel zur Recherche von fehlenden Daten, zur Übertragung von realen Sachverhalten in ein geometrisches Modell sowie zum Experimentieren oder Simulieren genutzt werden. In den Bildungsstandards Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife (KMK 2012) wird das Potenzial digitaler Mathematikwerkzeuge in vier verschiedenen Bereichen gesehen. Der erste Bereich ist das Entdecken mathematischer Zusammenhänge, insbesondere durch interaktive Erkundungen beim Modellieren und Problemlösen. Lernende können selbstständig eine Vielzahl an Beispielen als Ausgangspunkt für Begriffsbildungen, Problemlösungen oder Vermutungs- und Begründungsfindungen erzeugen. Digitale Werkzeuge ermöglichen hier neue Erkenntniswege, indem sie die schnelle und flexible Umsetzung verschiedener Modelle ermöglichen. Der zweite Bereich ist die Verwendung vielfältiger Darstellungsmöglichkeiten zur Verständnisförderung. Dies gilt insbesondere bei Multi-Repräsentationssystemen, bei denen die Darstellungen interaktiv miteinander verknüpft sind. Der dritte Bereich ist die Reduktion schematischer Abläufe bei der Verarbeitung größerer Datenmengen. Hier können beispielsweise Realdaten viel stärker einbezogen und komplexere Modellierungen als ohne die Verwendung des Werkzeugs durchgeführt werden. Der vierte Bereich ist die Unterstützung individueller Präferenzen und Zugänge beim Bearbeiten von Aufgaben. Hierzu zählt auch die Nutzung von Kontrollmöglichkeiten, die digitale Werkzeuge bieten.

Modellieren mit digitalen Werkzeugen

Diese unterschiedlichen Potenziale digitaler Mathematikwerkzeuge kommen bei Modellierungsproblemen an unterschiedlichen Stellen im Modellierungskreislauf zum Tragen. Einige Möglichkeiten für den Einsatz digitaler Werkzeuge in einem Modellierungsprozess sind im Modellierungskreislauf in Abb. 1 dargestellt, eine Modifikation des Modellierungskreislaufes von Blum & Leiß (2007). Es wird deutlich, dass die digitalen Werkzeuge

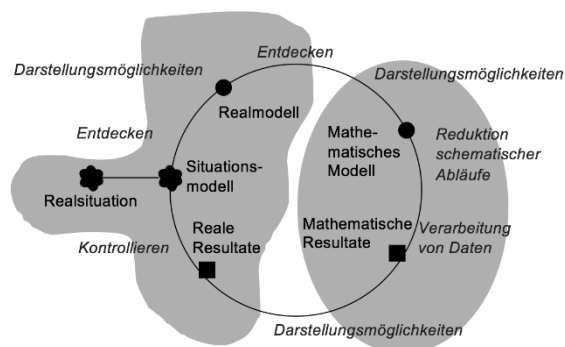


Abb. 1: Möglicher Einsatz digitaler Werkzeuge im Modellierungskreislauf (Greefrath 2011)

In Institut für Mathematik und Informatik Heidelberg (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2016* (S. x–y). Münster: WTM-Verlag

beim Modellieren in allen Phasen des Modellierungskreislaufs mit unterschiedlichen Funktionen sinnvoll eingesetzt werden können.

Betrachtet man den Schritt des Berechnens mit digitalen Werkzeugen genauer, so erfordert die Bearbeitung von Modellierungsaufgaben mit digitalen Werkzeugen zwei Übersetzungsprozesse. Zunächst muss die Modellierungsaufgabe verstanden, vereinfacht und in die Sprache der Mathematik übersetzt werden. Das digitale Werkzeug kann jedoch erst eingesetzt werden, wenn die mathematischen Ausdrücke in die Sprache des digitalen Werkzeugs übersetzt worden sind. Die Ergebnisse des Werkzeugs müssen dann wieder in die Sprache der Mathematik zurücktransformiert werden. Schließlich kann dann das ursprüngliche Problem gelöst werden, wenn die mathematischen Ergebnisse auf die reale Situation bezogen werden. Diese Übersetzungsprozesse können in einem erweiterten Modellierungskreislauf dargestellt werden, der neben der realen Welt und der mathematischen Welt auch die technologische Welt berücksichtigt (vgl. Greefrath 2011).

Aktuell existiert noch wenig empirisch gesichertes Wissen zu den unterrichtlichen Möglichkeiten und Grenzen digitaler Werkzeuge beim Modellieren im Mathematikunterricht. Offene Forschungsfragen findet man etwa bei Niss et al. (2007). Dazu zählen unter anderem die Fragen, wie digitale Werkzeuge in unterschiedlichen Schulstufen zur Unterstützung von Modellierungsprozessen eingesetzt werden sollten, wann digitale Werkzeuge Lerngelegenheiten beim Modellieren ermöglichen oder verhindern, oder ob das in Modellierungsproblemen notwendige Nachdenken und Reflektieren durch Technologie beeinträchtigt oder gefördert wird.

Konzeption der Fallstudie

Zur Beantwortung der Fragen, wie die Dynamische Geometrie-Software (DGS) bei der Bearbeitung von Modellierungsaufgaben verwendet wird und welche Chancen und Risiken mit dieser Verwendung verbunden sind, wurde im Oktober 2015 eine Fallstudie mit acht Schülerinnen und Schülern Münsteraner Gymnasien im Alter von 15 bzw. 16 Jahren durchgeführt. Die Teilnehmenden bearbeiteten zunächst eine 15-minütige Einführung in die DGS GeoGebra und anschließend zwei Modellierungsaufgaben, für die sie jeweils immer ca. 20 Minuten benötigten. Während der Bearbeitung wurden sowohl die Schülerinnen und Schülern als auch der PC-Bildschirm gefilmt. Zudem wurden die Teilnehmenden nach der Bearbeitung in einem kurzen Leitfadeninterview zu den Aufgaben sowie zur Bearbeitung mit der DGS befragt. Die eingesetzten Aufgaben wurden im Rahmen des Forschungsprojekts LIMO (Lösungsinstrumente beim Modellieren) an der Universität Münster entwickelt und behandeln verschiedene geometrische Modellierungsprobleme.

Die Schülerinnen und Schülern erhielten ein Arbeitsblatt mit dem Aufgabentext sowie der zur Aufgabe gehörigen Abbildung (etwa die Karte eines Parks, in dem der Standort eines neuen Spielplatzes gesucht werden sollte). Zudem erhielten die Schülerinnen und Schülern eine vorbereitete GeoGebra-Datei mit der gleichen Abbildung wie auf dem Arbeitsblatt. Sie arbeiteten jeweils in Partnerarbeit, und wurden dazu aufgefordert, während der Bearbeitung möglichst viel miteinander über die Aufgabe zu kommunizieren.

Ergebnisse der Fallstudie

Bei der Analyse der Arbeitsprozesse wurde deutlich, dass die Teilnehmenden durchgängig mit Hilfe der Software arbeiteten und das Arbeitsblatt lediglich zu Beginn zum Lesen der Aufgabenstellung sowie gegen Ende für Kontrollüberlegungen nutzten. Dabei wurden die Darstellungsmöglichkeiten sowie die Dynamik der DGS von Beginn an auch für Planungen und erste Entwürfe ausgenutzt. Dies zeigt der Kommentar einer Schülerin: „Erstmal so grob gucken und es danach genauer machen“. Skizzen auf dem Papier wurden selten und nur zur Vermittlung des bereits konstruierten Modells angefertigt. Wie oben bereits erläutert, sind beim Modellieren mit digitalen Werkzeugen mehrere Übersetzungsprozesse nötig. Der Schritt vom Realmodell zum mathematischen Modell am Computer wurde von den teilnehmenden Schülerinnen und Schülern sehr unterschiedlich durchgeführt. Zum einen trat der Fall auf, dass Schülerinnen und Schülern sich zunächst ein mathematisches Modell überlegten und dieses dann in der Software darzustellen versuchten. In diesen Fällen folgte also die Übersetzung in ein digitales Modell erst nach der Mathematisierung. Dabei barg auch dieser Schritt einige Schwierigkeiten, so mussten die Schülerinnen und Schülern durchaus auch Beschränkungen durch die Software in Kauf nehmen, etwa bei dem Wunsch, einen Kreis durch vier Punkte zu zeichnen, da die Software nur den Befehl „Kreis durch 3 Punkte“ anbietet. Andererseits trat aber auch der Fall auf, dass die Software ganz bewusst als Inspiration für die Suche nach weiteren Modellen genutzt wurde. Dies äußerte sich darin, dass die Werkzeugleiste am oberen Rand der Oberfläche mit dem Cursor abgefahren wurde und verschiedene Modelle ausprobiert und dann entweder verworfen oder für gut befunden wurden. In diesen Fällen wurden also erst die Modelle in der Software betrachtet und mit deren Hilfe die Realsituation dann mathematisiert. Durch dieses Vorgehen fand häufig bereits durch das Nutzen und Vergleichen verschiedener Modelle eine Kontrolle des gefundenen realen Resultats statt. Bezogen auf das mathematische Arbeiten äußerten die Teilnehmenden stets, dass sie die Software als Hilfe empfanden, obwohl sie vor der Einführung im Rahmen der Studie noch kaum Erfahrungen mit dem Programm vorweisen konnten. Als Gründe nannten sie, dass die Software umständliche

Konstruktionen oder Berechnungen verkürze und viele Möglichkeiten zur Präsentation der gefundenen Lösung bieten kann. Dabei empfanden viele Schülerinnen und Schülern es als ausreichende Vermittlung ihrer Resultate, wenn sie lediglich die entsprechende Datei abspeicherten. Da die Teilnehmenden aber auf dem Arbeitsblatt zur Dokumentation ihres Lösungsweges aufgefordert wurden, entstanden in der Fallstudie auch einige Textdokumente. Deren Analyse zeigte, dass häufig ein mehrfaches Durchlaufen des Modellierungskreislaufs auch in den Antworten erkennbar war, beispielsweise weil mehrere Modelle angegeben wurden.

Fazit

Bezogen auf die Ausgangsfragen lässt sich also festhalten, dass die Bearbeitung der Aufgabe durchgängig mit Hilfe der Software stattfindet und dass die DGS auch tatsächlich in allen Teilschritten des Modellierens verwendet wird. Dabei bietet sie die Chance, dass in kurzer Zeit viele Modelle sowohl entdeckt und ausprobiert als auch hinterfragt und validiert werden können. Dieses Ausprobieren birgt aber auch Risiken, wenn nur unreflektiert mathematische Modelle gewählt werden, diese aber nicht auf ihre Sinnhaftigkeit im Anwendungskontext hinterfragt werden. Findet diese Reflexion allerdings statt, bietet die Software die Möglichkeit, die gewählten Modelle schnell und einfach zu modifizieren ohne erneut lange Konstruktionen oder Berechnungen durchführen zu müssen. Gleichzeitig ermöglicht die einfache Bedienung der Software auch das Verwenden von Modellen, die den Lernenden bisher unbekannt sind. Somit ist es als Chance der DGS anzusehen, dass die Software eine Neugierde auf weitere, bislang noch unbekannte mathematische Möglichkeiten anregen kann. Zur Klärung der Frage, ob bei dem Einsatz von DGS bei Modellierungsaufgaben die genannten Chancen oder doch die Risiken überwiegen, bedarf es weiterführender quantitativer Studien.

Blum, W., & Leiss, D. (2007). How do students and teachers deal with mathematical modelling problems? The example sugarloaf and the DISUM project. In C. Haines, P. Galbraith, W. Blum, & S. Khan (Hrsg.), *Mathematical modelling (ICTMA 12): education, engineering and economics* (S. 222-231). Chichester: Horwood.

Greefrath, G. (2011): Using Technologies: New Possibilities of Teaching and Learning Modelling - Overview, in: G. Kaiser, W. Blum, R. Borromeo Ferri, G. Stillman (Eds.): *Trends in teaching and learning of mathematical modelling, ICTMA 14*, Springer Dordrecht Heidelberg London New York, 301-304

KMK (2012): *Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife*. URL: http://www.kmk.org/fileadmin/veroeffentlichungen_beschlesse/2012/2012_10_18-Bildungsstandards-Mathe-Abi.pdf (abgerufen am: 01.03.2016)

Niss et al. (2007): *Introduction, Modelling and Applications in Mathematics Education*, New ICMI Study Series, Springer