Martin Erik HORN, Berlin

Inverse von Rechteck-Matrizen

Dieser Beitrag baut auf dem letztjährigen GDM-Kurzvortrag „Ein physikdidaktischer Blick auf die Lineare Algebra" (Horn 2015a) auf und will zeigen, dass linksseitige Inverse einer Rechteck-Matrix $\mathbf{A} = (a_{ij})$ aus m Zeilen und n Spalten (m > n) didaktisch leicht zugänglich als Matrix

$$\mathbf{A}^{-1} = (\mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2 \wedge \ldots \wedge \mathbf{a}_n)^{-1} (\mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2 \wedge \ldots \wedge \mathbf{a}_{i-1} \wedge \sigma_j \wedge \mathbf{a}_{i+1} \wedge \ldots \wedge \mathbf{a}_n)$$

mit n Zeilen und m Spalten formuliert und diskutiert werden können. Dabei beruht dieser Zugang auf zwei wesentlichen didaktischen Setzungen:

- Während derzeit im schulischen und hochschulischen Bereich die Interpretation von Matrizen vorrangig zeilenweise erfolgt, wird hier die Matrix **A** spaltenweise gedeutet. Sie setzt sich somit aus insgesamt n Koeffizientenvektoren $\mathbf{a}_j$ zusammen.
- Vektoren werden im Sinne der Geometrischen Algebra als Linearkombinationen von verallgemeinerten Pauli-Matrizen σ_i geschrieben, wobei die Pauli-Matrix σ_i einen Einheitsvektor in i-Richtung repräsentiert. Der Koeffizientenvektor $\mathbf{a}_j$ schreibt sich somit als: $\mathbf{a}_j = a_{1j}\, \sigma_1 + a_{2j}\, \sigma_2 + \ldots + a_{mj}\, \sigma_m$

Dieser Zugang hat sich im fachhochschulischen Bereich bewährt und kann sowohl mit leistungsstärkeren Studierenden (Horn 2015b) wie auch mit mathematikferneren Studierenden (Horn 2016a) umgesetzt werden.

Physikdidaktisches Intermezzo

Als Teilzeitmathematiker mit Wurzeln in der Physik folge ich bei der weitern Darstellung dem babylonischen Vorgehen, das Feynman als für die Physik charakterisierend ansieht und folgendermaßen beschreibt: „Die alten Babylonier kannten keine Methode für das Aufschreiben von Formeln. Stattdessen machten Sie ein Beispiel nach dem anderen – das ist alles" (Feynman 2006, S. 70).

Das oben Beschriebene soll also anhand von Beispielen erklärt und erörtert werden – ganz so, wie ich mich auch mit den Studierenden im fachhochschulischen Bereich mathematischen Sachverhalten nähere.

Eine Klausuraufgabe zur Linearen Algebra

In der Klausur des Moduls M22 „Mathematik und Statistik" des MSB-Studiengangs „Medical Controlling and Management" wurde im Sommersemester 2015 die folgende Aufgabe (Horn 2016a) gestellt:

In Institut für Mathematik und Informatik Heidelberg (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2016* (S. x–y). Münster: WTM-Verlag

Zur Herstellung einer einzigen Mengeneinheit (ME) des Endproduktes E_1 werden 5 ME des Rohstoffes R_1 und 8 ME des Rohstoffes R_2 benötigt. Zur Herstellung einer einzigen Mengeneinheit des Endproduktes E_2 werden 2 ME des Rohstoffes R_1 und 4 ME des Rohstoffes R_2 benötigt. Berechnen Sie, welche Mengen der Endprodukte E_1 und E_2 hergestellt werden, wenn im Herstellungsprozess insgesamt genau 60 ME des Rohstoffes R_1 und 100 ME des Rohstoffes R_2 verbraucht werden.

Die Aufgabe führt auf eine Matrizengleichung für den Gesamtrohstoffverbrauch und den beiden Koeffizientenvektoren der quadratischen Matrix **A**:

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 8 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 60 \\ 100 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{a}_1 = 5\,\sigma_1 + 8\,\sigma_2 \quad \text{und} \quad \mathbf{a}_2 = 2\,\sigma_1 + 4\,\sigma_2$$

Neben einer direkten Lösung mit Hilfe der äußeren Produkte der Koeffizientenvektoren und des Ergebnisvektors (Horn 2015c & 2016b) ist auch die Lösung unter Rückgriff auf die Inverse $\mathbf{A}^{-1}$ möglich. Die Definitionsgleichung für Inverse liefert die beiden Ergebnisvektoren $\mathbf{r}_1$ und $\mathbf{r}_2$:

$$\mathbf{A}\,\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 8 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{r}_1 = \sigma_1 \quad \text{und} \quad \mathbf{r}_2 = \sigma_2$$

Die hypothetische Frage „*Welche Mengen der Endprodukte E_1 und E_2 werden hergestellt, wenn im Herstellungsprozess genau 1 ME des ersten Rohstoffes R_1* (bzw. genau 1 ME von R_2) *verbraucht wird?*“ umschreibt die fiktive Bedeutung der Elemente der gesuchten Inversen. Sie lassen sich mittels der eingangs aufgeführten Beziehung berechnen:

$$x_1 = (\mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2)^{-1}\,(\sigma_1 \wedge \mathbf{a}_2) = 1 \qquad x_2 = (\mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2)^{-1}\,(\sigma_2 \wedge \mathbf{a}_2) = -\,1/2$$

$$y_1 = (\mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2)^{-1}\,(\mathbf{a}_1 \wedge \sigma_1) = -\,2 \qquad y_2 = (\mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2)^{-1}\,(\mathbf{a}_1 \wedge \sigma_2) = 5/4$$

Die negativen Werte zeigen an, dass dieser hypothetische Rohstoffverbrauch in der realen Wirtschaftswelt nicht realisiert wird. Mathematisch ist ein solches Vorgehen jedoch sinnvoll und liefert das erwartete Ergebnis:

$$\vec{P} = \mathbf{A}^{-1}\,\vec{r} = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 \\ -2 & 5/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 60 \\ 100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Eine ausführlichere Darstellung dieses Lösungswegs findet sich auch in der aufgeführten Literatur.

Modifikation der Klausuraufgabe

Im realen Wirtschaftsleben ist es selten, dass die Anzahl notwendiger Rohstoffe und die Anzahl der mit ihrer Hilfe produzierten Endprodukte überein stimmt. Deshalb wird die diskutierte Aufgabe um einen dritten Rohstoff ergänzt, so dass eine realistischere Situation modelliert wird:

*Zur Herstellung einer einzigen Mengeneinheit (ME) des Endproduktes E_1 werden 5 ME des Rohstoffes R_1, 8 ME des Rohstoffes R_2 und **1 ME des Rohstoffes R_3** benötigt. Zur Herstellung einer einzigen Mengeneinheit des Endproduktes E_2 werden 2 ME des Rohstoffes R_1, 4 ME des Rohstoffes R_2 und **6 ME des Rohstoffes R_3** benötigt.*
*Berechnen Sie, welche Mengen der Endprodukte E_1 und E_2 hergestellt werden, wenn im Herstellungsprozess insgesamt genau 60 ME des Rohstoffes R_1, 100 ME des Rohstoffes R_2 und **40 ME des Rohstoffes R_3** verbraucht werden.*

Diese Aufgabe führt wieder auf zwei Koeffizientenvektoren, die dieses Mal jedoch mit Hilfe einer Rechteck-Matrix **B** ermittelt werden:

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 8 & 4 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 60 \\ 100 \\ 40 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \mathbf{b}_1 &= 5\,\sigma_1 + 8\,\sigma_2 + \sigma_3 \\ \mathbf{b}_2 &= 2\,\sigma_1 + 4\,\sigma_2 + 6\,\sigma_3 \end{aligned}$$

Dieses überdeterminierte Lineare Gleichungssystem aus drei Linearen Gleichungen mit zwei Unbekannten ist lösbar, da die beiden Koeffizientenvektoren $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$ und der Ergebnisvektor komplanar sind. Für solche lösbaren Linearen Gleichungssysteme macht es Sinn, analog zum vorherigen Abschnitt einen Lösungsweg mit Hilfe einer Inversen $\mathbf{B}^{-1}$ zu formulieren:

$$\mathbf{B}\,\mathbf{B}^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 8 & 4 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \mathbf{r}_1 &= \sigma_1 \\ \mathbf{r}_2 &= \sigma_2 \\ \mathbf{r}_2 &= \sigma_3 \end{aligned}$$

Frei nach Rota, dass große Lehrer etwas von einem Schwindler „a bit of a con man“ hätten (Rota 1997, S. 9) wird hier verschwiegen, dass Koeffizientenvektoren und Ergebnisvektoren nun nicht mehr komplanar liegen und deshalb tatsächlich gar keine rechtsseitige Inverse berechnet wird. Das Ergebnis stellt jedoch eine vorzügliche linksseitige Inverse dar.

$$x_1 = (\mathbf{b}_1 \wedge \mathbf{b}_2)^{-1}\,(\sigma_1 \wedge \mathbf{b}_2) = \frac{1}{684}\,(46 - 66\,\sigma_1\sigma_2 - 22\,\sigma_2\sigma_3 - 44\,\sigma_3\sigma_1)$$

$$x_2 = (\mathbf{b}_1 \wedge \mathbf{b}_2)^{-1}\,(\sigma_2 \wedge \mathbf{b}_2) = \frac{1}{684}\,(64 + 42\,\sigma_1\sigma_2 + 14\,\sigma_2\sigma_3 + 28\,\sigma_3\sigma_1)$$

$$x_3 = (\mathbf{b}_1 \wedge \mathbf{b}_2)^{-1}\,(\sigma_3 \wedge \mathbf{b}_2) = \frac{1}{684}\,(-\,58 - 6\,\sigma_1\sigma_2 - 2\,\sigma_2\sigma_3 - 4\,\sigma_3\sigma_1)$$

$$y_1 = (\mathbf{b}_1 \wedge \mathbf{b}_2)^{-1}\,(\mathbf{b}_1 \wedge \sigma_1) = \frac{1}{684}\,(-\,15 + 11\,\sigma_1\sigma_2 + 55\,\sigma_2\sigma_3 + 88\,\sigma_3\sigma_1)$$

$$y_2 = (\mathbf{b}_1 \wedge \mathbf{b}_2)^{-1}\,(\mathbf{b}_1 \wedge \sigma_2) = \frac{1}{684}\,(-\,6 - 7\,\sigma_1\sigma_2 - 35\,\sigma_2\sigma_3 - 56\,\sigma_3\sigma_1)$$

$$y_3 = (\mathbf{b}_1 \wedge \mathbf{b}_2)^{-1}\,(\mathbf{b}_1 \wedge \sigma_3) = \frac{1}{684}\,(123 + \sigma_1\sigma_2 + 5\,\sigma_2\sigma_3 + 8\,\sigma_3\sigma_1)$$

Damit ergibt sich als Resultat der modifizierten Aufgabenstellung:

$$\vec{P} = \mathbf{B}^{-1}\,\vec{r} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 60 \\ 100 \\ 40 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Inverse von Rechteck-Matrizen lassen sich in der hier gezeigten Art zur Lösung konsistenter Linearer Gleichungssysteme einsetzen. Sie ermöglichen damit einen alternativen didaktischen Zugang zu Linearen Gleichungssystemen.

Darüber hinaus ist eine wesentliche Eigenschaft der hier berechneten Inversen didaktisch interessant: Die Elemente der linksseitigen Inversen $\mathbf{B}^{-1}$ bestehen nicht aus rein reellen Zahlen (Skalaren), sondern aus Linearkombinationen von reellen Zahlen und Bivektoren und somit aus Multivektoren mit quaternionischer Struktur. Dieser Ansatz lässt sich deshalb zu einer alternativen Motivation der Quaternionen einsetzen. Und er zeigt, wie quaternionische Strukturen verallgemeinert werden können – einfach indem die Anzahl an Rohstoffen und Endprodukten sukzessive erhöht wird.

Literatur

Feynman, R. P. (2006). Physik – ‚The Lost Lectures‘. München: Pearson Studium.

Horn, M. E. (2015a). Ein physikdidaktischer Blick auf die Lineare Algebra. In F. Caluori et al. (Hrsg.), BzMU 2015, Band 1, S. 408–411, Münster: WTM.

Horn, M. E. (2015b). Lineare Algebra in physikdidaktischer Ausprägung. PhyDid B – Didaktik der Physik, Beiträge zur DPG-Frühjahrstagung in Wuppertal 2015. URL: http://phydid.physik.fu-berlin.de/index.php/phydid-b/article/view/626 [17.12.2015]

Horn, M. E. (2015c). Modern Linear Algebra. A Geometric Algebra Crash Course. OHP-Folien des Kurses 200691.01 – Mathematics for Business and Economics, BSEL/HWR Berlin, veröffentlicht als Anhang von Horn, M. E. (2015b).

Horn, M. E. (2016a). Die Geometrische Algebra im Schnelldurchgang. Beitrag zur DPG-Jahrestagung in Hannover. Veröffentlichung vorgesehen unter www.phydid.de.

Horn, M. E. (2016b). Moderne Lineare Algebra – Ein Überblick. OHP-Folien des Moduls M22 – Mathematik und Statistik, MSB. Anhang von Horn, M. E. (2016a).

Rota, G.-C. (1997). Indiscrete Thoughts. Boston, Basel, Berlin: Birkhäuser.