

Martin Erik HORN, Berlin

## Wie groß ist der Flächeninhalt eines Parallelogramms?

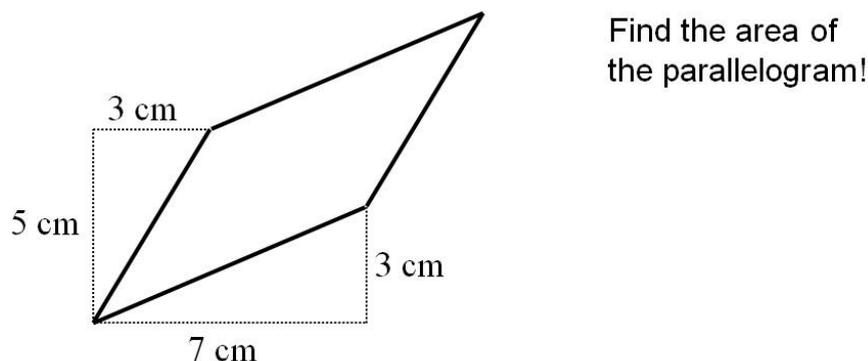
Unser mathematisches Weltverständnis wird unter anderem durch zwei Problempunkte beeinträchtigt: Zum einen suggeriert die allumfassende und scheinbar alternativlose Nutzung kartesischer Koordinatensysteme, dass die Grundstruktur unserer Welt durch senkrecht geformte Grundobjekte (z.B. Quadrate oder Rechtecke) determiniert ist. Zum anderen findet sich in unseren Weltbeschreibungen eine oft unüberwindbare dimensionale Trennung, wenn null-, ein- oder weitere höherdimensionale mathematische Objekte strikt losgelöst voneinander betrachtet werden.

Parallelogramme durchbrechen diese beiden Problempunkte: Die Seiten eines Parallelogramms stehen in der Regel nicht senkrecht zueinander. Und mathematisch können Parallelogramme als Summe aus Skalaren und Bivektoren verstanden und beschrieben werden. Es ist deshalb auch aus didaktischer Sicht wichtig, ein tieferes Verständnis für sie zu entwickeln.

### Überblick über die Rahmenbedingungen der Studie

An der Hochschule für Wirtschaft und Recht Berlin wird die wirtschaftsmathematische Grundlagenausbildung der Anfangssemester inhaltlich identisch sowohl in englisch- wie auch deutschsprachigen Kursen angeboten. Teil dieser Kurse ist zu etwa einem Drittel die Lineare Algebra.

Da sich die englischsprachigen Kursteilnehmer in der Regel als deutlich leistungsstärker erweisen als deutschsprachige, konnte in vergangenen Semestern in den von mir durchgeführten englischen Kursen zusätzlich zu den konventionellen Kursinhalten eine Behandlung der Linearen Algebra aus geometrisch-algebraischer Perspektive (Horn 2015a,b,c & 2016a,b) erfolgen. Damit wurde eine ursprünglich physikorientierte Mathematisierung (Hestenes 2003), (Doran & Lasenby 2003), (Parra Serra 2009) in einen wirtschaftsmathematischen, also physikfremden Kontext eingebettet.



**Abb. 1: Aufgabenstellung zur Flächenbestimmung am Parallelogramm.**

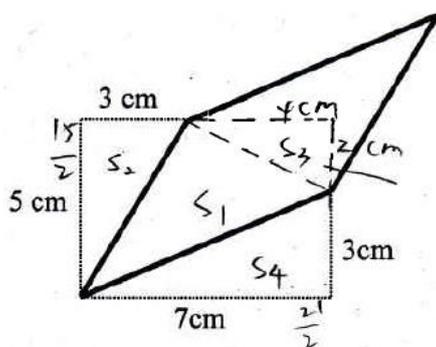
In Institut für Mathematik und Informatik Heidelberg (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2016* (S. x–y). Münster: WTM-Verlag

Begleitet wurde diese Kursdurchführung im Wintersemester 2014/2015 durch eine Untersuchung, wie die Studierenden den Flächeninhalt eines vorgegebenen Parallelogramms (siehe Abb. 1) berechnen.

### Konventionelle Flächeninhaltsbestimmungen

Im Vortest gelang es etwa einem Drittel der Studierenden des englischsprachigen Kurses, den Flächeninhalt mit Hilfe konventioneller Verfahren korrekt zu bestimmen. Dabei nutzen sie die drei folgenden Strategien:

- Berechnung mit Hilfe einer geometrischen Zerlegung des Parallelogramms (siehe Abb. 2),
- Berechnung mit Hilfe trigonometrischer Beziehungen,
- (und sehr selten) Berechnung mit Hilfe von Determinanten.



$$\begin{aligned}
 S_1 &= 5 \times 7 - S_2 - S_3 - S_4 \\
 &= 35 - \frac{15}{2} - \frac{21}{2} - 4 \\
 &= 13 \text{ cm}^2
 \end{aligned}$$

$$S = 2S_1 = 26 \text{ cm}^2$$

Abb. 2: Studentische Beispiellösung durch Zerlegung des Parallelogramms.

Zum Vergleich wurde der Fragebogen ebenfalls im deutschsprachigen Kurs ausgegeben mit dem deprimierenden Ergebnis, dass keinem einzigen Studierenden eine korrekte Flächeninhaltsberechnung gelang. Offenkundig bringen Studienanfänger diese Fähigkeit nicht aus der Schule mit.

### Kernideen der Geometrischen Algebra

Nach dem Vortest wurde die Geometrische Algebra mit den Studierenden des englischsprachigen Kurses in seminaristischer Form (in 12 x 45 Min.) erarbeitet. Dabei stand die mathematische Behandlung nicht-kommutativer Beziehungen im Vordergrund, die sich in der Struktur der Geometrischen Algebra (siehe Abb. 3) widerspiegeln und die zur Lösung wirtschaftsmathematisch relevanter Linearer Gleichungssysteme eingesetzt wurden.

### Flächeninhaltsbestimmung mit Hilfe der Geometrischen Algebra

Nach der Erörterung der Geometrischen Algebra wurde die Aufgabenstellung mehrmals erneut ausgegeben und darüber hinaus in der Klausur abgefragt. Eine studentische Beispiellösung zeigt Abb. 4. Zuerst werden die Parallelogrammseiten vektoriell als Linearkombinationen von Pauli-Matrizen

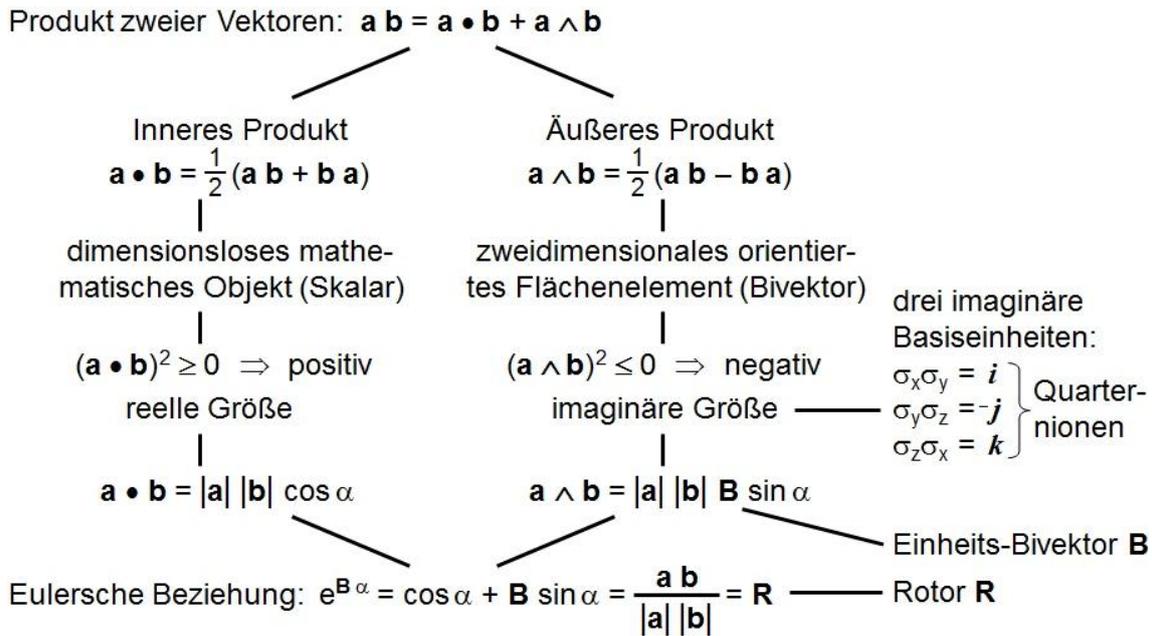


Abb. 3: Struktur der Geometrischen Algebra.

dargestellt. Die Multiplikation dieser beiden Vektoren liefert in Form des anti-symmetrischen bivektoriellen Anteils direkt den Flächeninhalt des vorgegebenen Parallelogramms. Da diese Lösungsvariante nicht nur deutlich zeitsparender, sondern auch konzeptuell sehr übersichtlich erfolgt, wurde sie von der überwiegenden Mehrzahl der Studierenden gewählt. Die Ergebnisse zeigen weiter, dass die Lösungshäufigkeit im Laufe des Semesters stetig anstieg (siehe Abb. 5) und sich bei den meisten Studierenden die Fähigkeit zur korrekten Flächeninhaltsbestimmung eines schräg liegenden Parallelogramms nach Kursende ausgebildet hatte. Ist eine solche Wissensfundierung erfolgt, stellt der Übergang zur Lösung Linearer Gleichungssys-

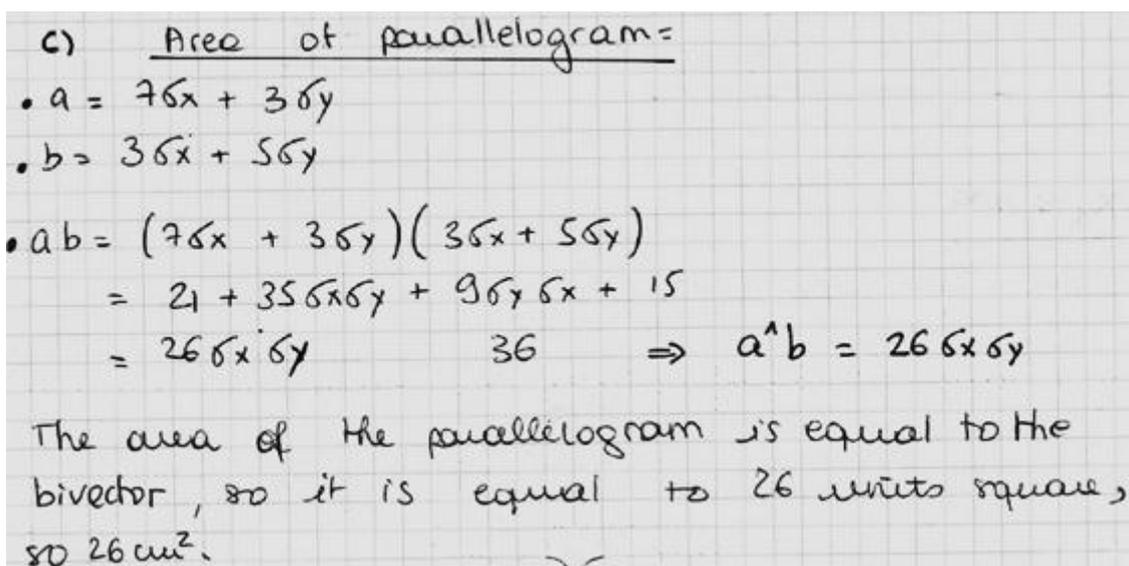
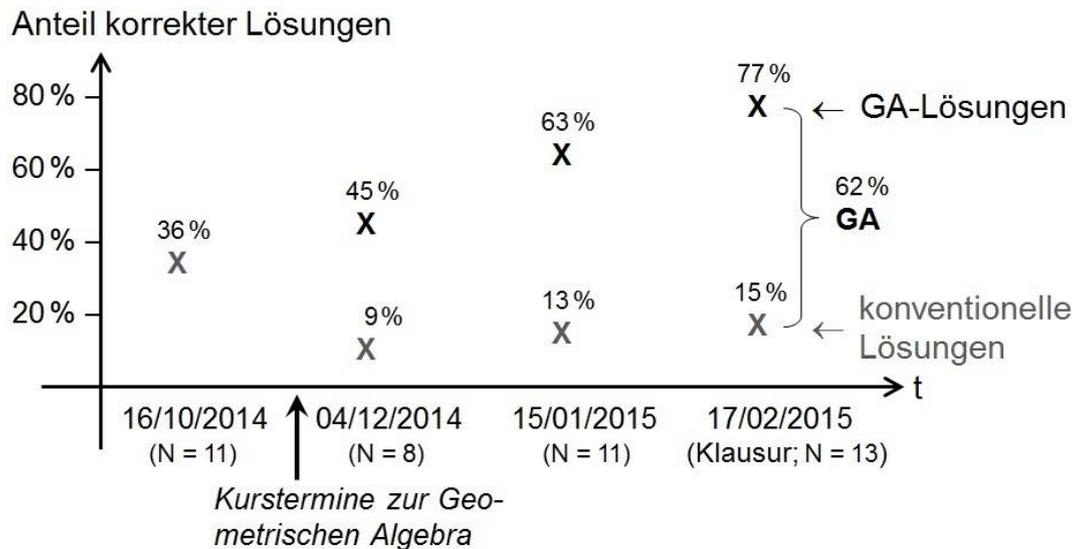


Abb. 4: Studentische Lösung der Flächeninhaltsberechnung in der Klausur.



**Abb. 5: Zeitliche Entwicklung korrekter Lösungen der Studierenden des englischsprachigen Wirtschaftsmathematik-Kurses LV-Nr. 200 691.01 im WS 2014/2015.**

teme kein wesentliches konzeptuelles Problem mehr dar, da diese Lösungen im einfachsten Fall (LGS aus zwei Linearen Gleichungen) sehr anschaulich als Flächenvergleiche gedeutet und formuliert werden können.

## Literatur

- Doran, C. & Lasenby, A. (2003). *Geometric Algebra for Physicists*. Cambridge: CUP.
- Hestenes, D. (2003). Oersted Medal Lecture 2002: Reforming the Mathematical Language of Physics. *American Journal of Physics* 71 (2), 104–121.
- Horn, M. E. (2015a). Ein physikdidaktischer Blick auf die Lineare Algebra. In F. Caluori et al. (Hrsg.), *BzMU 2015*, Band 1, S. 408–411, Münster: WTM.
- Horn, M. E. (2015b). Lineare Algebra in physikdidaktischer Ausprägung. *PhyDid B – Didaktik der Physik*, Beiträge zur DPG-Frühjahrstagung in Wuppertal 2015. URL: <http://phydid.physik.fu-berlin.de/index.php/phydid-b/article/view/626> [17.12.2015].
- Horn, M. E. (2015c). *Modern Linear Algebra. A Geometric Algebra Crash Course*. Part I: Basics & Introduction. Part II: Solving Systems of Linear Equations. Part III: The Direct Product & Solving Higher-Dimensional Systems of Linear Equations. OHP-Folien des Kurses ‚Mathematics for Business and Economics‘, LV-Nr. 200 691.01, WS 2014/2015, BSEL/HWR Berlin, veröffentlicht als Anhang von Horn (2015b).
- Horn, M. E. (2016a). Physikdidaktische Interpretation des Gaußschen Algorithmus. Zur Veröffentlichung vorgesehen unter *PhyDid B – Didaktik der Physik*, Beiträge zur DPG-Frühjahrstagung in Hannover 2016. URL: [www.phydid.de](http://www.phydid.de) [17.12.2016].
- Horn, M. E. (2016b). *Modern Linear Algebra. A Geometric Algebra Crash Course*. Part IV: Transformation of Coordinates & Gaussian Method of Solving a System of Linear Equations. OHP-Folien des Kurses ‚Mathematics for Business and Economics‘, LV-Nr. 200 691.01, WS 2015/2016, BSEL/HWR Berlin. Zur Veröffentlichung vorgesehen als Anhang von Horn (2016a).
- Parra Serra, J. M. (2009). Clifford Algebra and the Didactics of Mathematics. *Advances in Applied Clifford Algebras* 19 (3/4), 819–834.