

Hans HUMENBERGER, Wien

## **Auf dem Weg zum Satz von Anne – durch Variationen bei einem elementargeometrischen Problem**

Bei der Verallgemeinerung eines einfachen elementargeometrischen Problems treten spannende Fragen auf, die uns – wie sich durch Recherche im Nachhinein herausgestellt hat – in den Dunstkreis des so genannten Satzes von Anne geführt haben. Dies ist ein relativ unbekannter Satz über konvexe Vierecke, der offenbar auf den französischen Mathematiker Pierre-Leon Anne (1806 – 1850) zurückgeht. Uns ist nicht bekannt, wie Anne damals seinen Satz bewiesen hat (geschweige denn, wie er darauf gekommen ist<sup>1</sup>). Im Folgenden wird ein rein elementargeometrischer Beweis für den Satz von Anne erarbeitet, von der Genese aber so, wie der Autor (diesen Satz noch gar nicht kennend) gemeinsam mit seinem Kollegen Dr. B. Schuppar (TU Dortmund) durch Verallgemeinerung auf die entsprechenden Phänomene gekommen ist. Die ersten Abschnitte (bis zum Drachenviereck) sind u. E. auch für den Schulunterricht geeignet. Hier können Schüler/innen auch in selbständiger Arbeit viel erkunden, indem sie mit Dynamischer Geometrie Software arbeiten (DGS als Messinstrument). Der Fall des allgemeinen Vierecks (hier kommt man dann eben zum Satz von Anne) ist Schülern/innen vermutlich nicht mehr in selbständiger Arbeit zumutbar, hier muss die Lehrkraft die Lernenden dabei unterstützen oder die zugehörige Begründung als Lehrervortrag planen. Auch in der Lehrerbildung kann dieses (offenbar sehr wenig bekannte) Thema mit Studierenden in einer Veranstaltung zur Elementargeometrie gewinnbringend umgesetzt werden, wir müssen dazu aber selbst erst Erfahrungen sammeln.

Inhaltlich spielt die Flächenformel für Dreiecke eine zentrale Rolle bei den Begründungen, bei den explorativen Phasen (Finden bzw. experimentelles Bestätigen von Vermutungen) ist DGS sehr gut und sinnvoll einsetzbar. Dadurch ist es möglich, dass Lernende selber experimentieren, Situationen explorieren und auf Vermutungen kommen, auch wenn die zugehörige Begründung vielleicht nicht in Eigenregie gelingt. Auch dann haben sie ein Stück Mathematik als Prozess (und nicht nur als Fertigprodukt) erfahren.

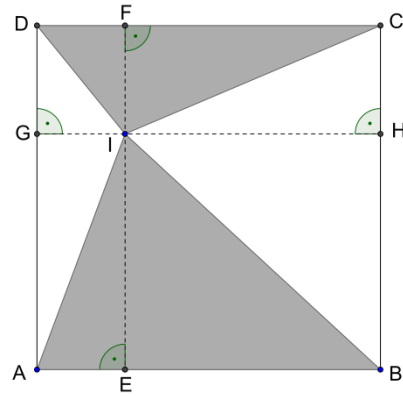
---

<sup>1</sup> Unsere Recherchen zu diesem Thema (auch persönlich bei fachkundigen Kollegen) haben zu nichts geführt. Keiner der von uns befragten Kollegen hat diesen Satz überhaupt gekannt, und auch wir bis vor kurzem nicht.

## Das Problem und seine Verallgemeinerung

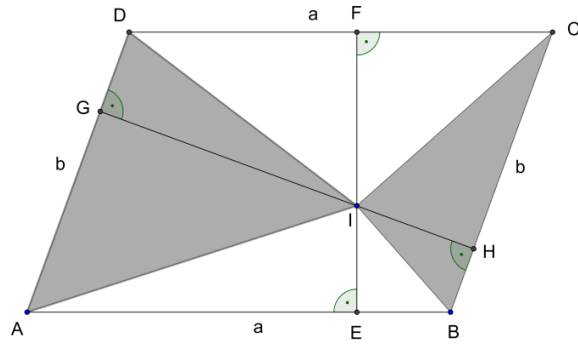
Ausgangspunkt ist das folgende Problem:

In einem Quadrat wird ein beliebiger Punkt  $I$  im Inneren mit den Ecken verbunden, die entstehenden Dreiecke werden abwechselnd grau und weiß gefärbt; dann ist die Summe der Flächeninhalte gleichfarbiger Dreiecke gleich groß. Die zugehörige Begründung sollte auch Schülern/innen nicht schwer fallen. Eine interessante Frage, die sich daraus ergibt, ist aber (wir beschränken uns dabei auf konvexe Vierecke): Gibt es noch andere Vierecke (außer dem Quadrat), für die dies auch gilt? Wenn ja, welche? Begründung?



Es ist nicht schwierig herauszufinden, dass dies auch für Rechtecke gilt (mit derselben Begründung wie bei Quadraten) und auch für Parallelogramme. Bei Parallelogrammen kann man z. B. durch die Flächenformeln für Dreiecke überlegen:

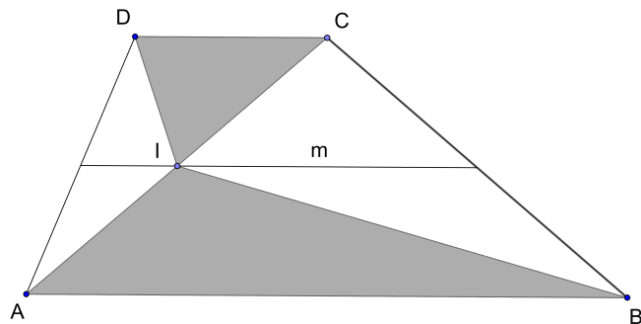
Die weißen beiden Dreiecke zusammen haben einen Flächeninhalt von  $a \cdot h_a / 2$ , die grauen zusammen einen von  $b \cdot h_b / 2$  (jeweils halbe Parallelogrammfläche); dahinter steckt die Konstanz der jeweiligen Höhensummen.



## Variation des Problems, andere spezielle Vierecke

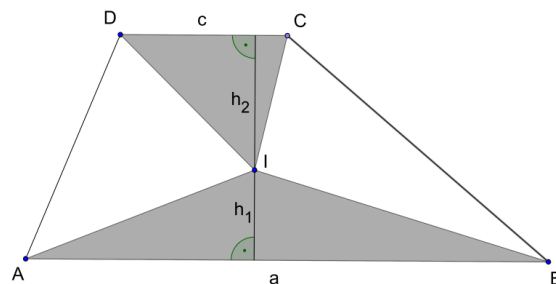
Als nächstes spezielles Viereck bietet sich das Trapez an. Hier ist es zwar nicht mehr so, dass man einen Punkt im Inneren beliebig wählen könnte für den angesprochenen Flächenausgleich zwischen Grau und Weiß, aber es gibt trotzdem solche inneren Punkte. Welche inneren Punkte sind dies beim Trapez? Genauso wie beim Parallelogramm kann man begründen, dass die Punkte auf der Mittellinie die gewünschte Eigenschaft (Flächenausgleich) haben (hier kann ein DGS als Messinstrument wieder gute Dienste leisten).

Wenn man  $I$  auf der Mittellinie  $m$  bewegt, so ändert sich die Flächensumme der beiden grauen Dreiecke nicht, die Flächensumme ergibt sich



leicht zu  $A_{\text{grau}} = \frac{a \cdot \frac{h}{2}}{2} + \frac{c \cdot \frac{h}{2}}{2} = \frac{(a+c) \cdot h}{4} = \frac{A_{\text{Trapez}}}{2}$ . Nun kommt eine typisch

mathematische Fragestellung: Gibt es bei Trapezen außer den Punkten auf der Mittellinie vielleicht noch andere Punkte mit der Flächenausgleichseigenschaft? Denn bis jetzt wurde ja nur begründet, dass die Punkte auf der Mittellinie diese Eigenschaft haben, die Frage nach anderen solchen möglichen Punkten wurde noch nicht berührt. Um zur Aussage zu kommen „Beim Trapez ist die Menge aller Punkte mit der gewünschten Flächenausgleichseigenschaft die Mittellinie“ („Ortslinie“) fehlt noch der Nachweis, dass keine anderen Punkte in Frage kommen. Aber dieser Nachweis ist beim Trapez nicht schwierig, er sollte von Schülern/innen in Eigenregie erbracht werden können: Wenn das Trapez kein Parallelogramm ist, dann muss  $a \neq c$  sein, o. B. d. A.  $a > c$ . Für  $h_1 < h_2$ , d. h.  $h_1 = h/2 - x$  und  $h_2 = h/2 + x$  gilt



$$A_{\text{grau}} = \frac{a \cdot \left(\frac{h}{2} - x\right)}{2} + \frac{c \cdot \left(\frac{h}{2} + x\right)}{2} = \underbrace{\frac{(a+c) \cdot h}{4}}_{\frac{A_{\text{Trapez}}}{2}} - \underbrace{\frac{x}{2} \cdot (a-c)}_{>0} < \frac{A_{\text{Trapez}}}{2}$$

Als nächstes käme der Drachen, es ergibt sich dabei, dass die Symmetriediagonale die Rolle der Mittellinie beim Trapez hat (man kann dies auf verschiedene Arten einsehen). Aus Platzgründen müssen wir hierfür auf Humenberger/Schuppar 2016 verweisen.

### Allgemeines Viereck

Wie ist nun die Situation bei einem beliebigen konvexen Viereck  $ABCD$  (wir gehen davon aus, dass es kein Parallelogramm ist)? Hier ist zunächst der Einsatz von DGS als heuristisches Werkzeug zu empfehlen: Man sucht Punkte  $I$  im Inneren des Vierecks, die die Flächenausgleichseigenschaft erfüllen. Technischer Tipp: Wenn man die Differenz der Flächeninhalte grauer und weißer Dreiecke berechnet, dann sind Punkte mit Zielwert 0 leicht zu finden. Nach ein paar Versuchen wird sich der Eindruck immer mehr verstärken, dass all diese Punkte auf einer Geraden liegen.

Man kann das Experiment weiter verfeinern: Man sucht zwei Punkte, die (wenigstens annähernd) die Bedingung erfüllen, legt eine Gerade hindurch und bindet den Punkt  $I$  der Dreiecke an diese Gerade; die Beobachtung

wird dadurch eindrucksvoll bestätigt. Welche Gerade ist es? Kann man zwei spezielle Punkte konstruieren, die die Bedingung erfüllen? Die Gerade durch diese beiden Punkte ist dann die gesuchte Ortslinie.

**Möglicher Ansatz:** Der Flächenvergleich grauer und weißer Dreiecke ist leicht zu kontrollieren, wenn der gemeinsame Punkt  $I$  auf einer Diagonale wandert: Die jeweils benachbarten Paare (verschiedenfarbiger!) Dreiecke, die je ein Stück dieser Diagonale als Grundseite besitzen, haben bezüglich dieser Grundseiten dieselben Höhen; zwei Dreiecke eines solchen Paares sind daher flächengleich, wenn  $I$  der Mittelpunkt der Diagonale ist. Das gilt für beide Diagonalen; somit sind zwei spezielle Punkte gefunden, die sogar sehr leicht zu konstruieren sind!

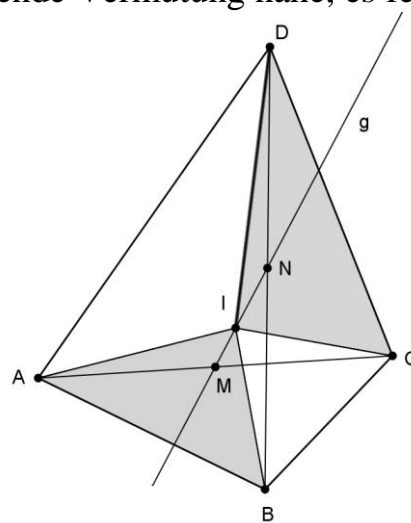
Wir bezeichnen die Mittelpunkte von  $AC$  und  $BD$  mit  $M$  und  $N$ . (An dieser Stelle heißt es in Mathematikbüchern gerne „Man sieht sofort, dass  $M$  und  $N$  die Bedingung erfüllen“ – wenn man die Mittelpunkte betrachtet, ist das in der Tat leicht einzusehen, aber wie kommt man darauf, dass diese Mittelpunkte eine besondere Rolle spielen? Hierzu braucht man heuristische Strategien!)

Konstruiert man nun mit DGS die Gerade  $g := MN$  und bindet den Punkt  $I$  an  $g$ , dann stellt man fest, dass die grauen und weißen Flächen tatsächlich exakt gleich groß sind; löst man  $I$  wiederum von  $g$ , dann ergibt sich: für  $I \notin g$  sind die Flächensummen verschieden.

Auch der Vergleich mit den bisherigen Ergebnissen für spezielle Vierecke verläuft positiv: Bei Trapezen liegen beide Diagonalenmitten auf der Mittellinie der Paralleelseiten; bei Drachen liegt eine Diagonalenmitte auf der anderen Diagonale, auch hier sind also die alten und neuen Resultate voll kompatibel. Diese Ergebnisse legen also folgende Vermutung nahe, es fehlt aber noch die Bestätigung durch einen Beweis (vgl. Humenberger/Schuppar 2016).

**Satz** („Satz von Anne“)

Es sei  $ABCD$  ein konvexes Viereck, das kein Parallelogramm ist. Dann liegen alle Punkte  $I$ , für die Flächenausgleich bei den grauen und weißen Dreiecken herrscht, auf der Geraden  $g := MN$  durch die beiden Mittelpunkte der Diagonalen.



## Literatur

Humenberger, H., Schuppar, B. (2016): Flächenausgleich bei Weiß und Grau in Vierecken – der Satz von Anne und sein Umfeld. Erscheint in: Der Mathematikunterricht **62**.