

Ingrid HUPP, Koblenz

Historische Multiplikationsverfahren im Mathematikunterricht der Grundschule

1. Einleitung

Im Mathematikunterricht wird Mathematik oft als „Fertigprodukt“ unterrichtet. Die Schülerinnen und Schüler lernen Regeln auswendig, die oft als willkürlich und damit sinnlos empfunden werden. Es wird nicht deutlich, dass Mathematik ein historischer Prozess ist, in dem oft jahrhundertlang und erbittert um die „richtige“ Form gerungen wurde. Durch einen historischen Zugang können die Lernenden nachvollziehen, wie bestimmte Algorithmen und Regeln entstanden sind, welche Alternativen diskutiert wurden und warum die heutigen Normalverfahren in der Schule verwendet werden. Die Schülerinnen und Schüler können die Entwicklungen und Entscheidungen nachvollziehen, kritisch reflektieren und gelangen so zu einem tieferen Verständnis des Wesens der Mathematik. Die ägyptische Multiplikation, die Gittermethode und das Verdopplungs-Halbierungsverfahren können zur Differenzierung sehr gut eingesetzt werden, so dass hierdurch in heterogenen Lerngruppen die individuellen Bedürfnisse der Lernenden besser berücksichtigt werden können. Schwächere Schülerinnen und Schüler können bei der Verwendung von weniger komplexen Algorithmen wie der Gittermethode Erfolgserlebnisse haben, während leistungsstarke Schüler komplexe Algorithmen wie die ägyptische Multiplikation und das Verdopplungs-Halbierungsverfahren erlernen und deren mathematischen Hintergrund (gegenseitiges Verändern, Anwendung des Distributivgesetzes, Darstellungssatz) erforschen können. Zudem wird eine Reflektion angeregt, aus welchen Gründen man sich für das heutige Normalverfahren entschieden hat.

2. Nepersche Streifen und Gittermethode

John Neper (1550 - 1617) war der Sohn eines schottischen Barons, Mathematiker, Naturgelehrter und Literat. Er schrieb 1614 ein Buch über Logarithmen, die er unabhängig von Jost Bürgi entwickelte. Seine Rechenstäbe hatten einen wichtigen Einfluss auf die Entwicklung der Rechenmaschinen. Beispielsweise basiert die erste mechanische Rechenmaschine von Schickard (1623) auf den Neperschen Rechenstäben. Nepersche Streifen können sich Schülerinnen und Schüler leicht selbst herstellen und sie dann bei Bedarf als Hilfsmittel zur Multiplikation verwenden. Verwendet man nur die

tatsächlich benötigten Ausschnitte aus den Neperschen Streifen, ergibt sich die Gittermethode, die in einigen Schulbüchern (z.B. Zahlenbuch, Mathematikus, Leonardo) vor der Einführung der schriftlichen Multiplikation besprochen wird. Teilweise erfolgt auch ein Vergleich mit dem Normalverfahren. Zur Verdeutlichung wird in Abbildung 1 die Multiplikation $164 \cdot 27$ mit der Gittermethode durchgeführt und dem Normalverfahren gegenübergestellt.

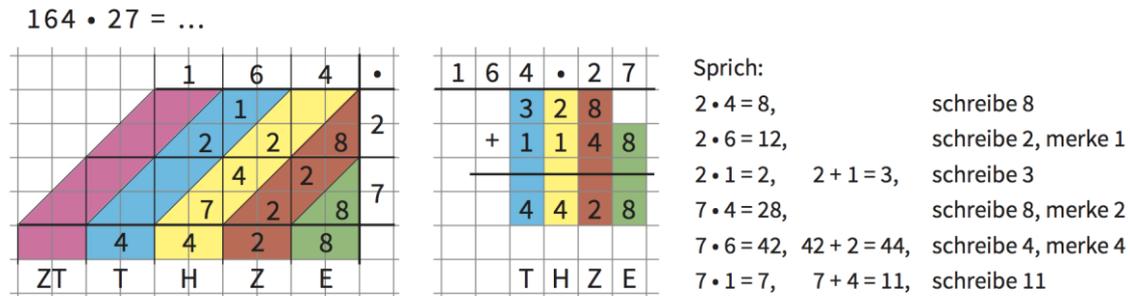


Abb. 1: Vergleich von Gittermethode und Normalverfahren,
Grafik M. Widiger, Idee: Zahlenbuch 4, S. 46

3. Verdopplungs-Halbierungs-Verfahren

Das Verdopplungs-Halbierungs-Verfahren findet man in der Literatur unter den unterschiedlichsten Bezeichnungen, beispielsweise als russische oder abessinische Bauernmultiplikation. Eine historisch exakte Erklärung der Entstehung dieses Verfahrens ist schwierig, alle bisherigen Erklärungsansätze sind umstritten. Die Grundidee: verdoppelt man in einem Produkt den einen Faktor und halbiert den anderen Faktor, so bleibt das Produkt konstant, d.h. $x \cdot y = \frac{x}{2} \cdot 2y$. Da sich im Bereich der natürlichen Zahlen nur gerade Zahlen halbieren lassen, muss bei ungeraden Zahlen mit Hilfe des Distributivgesetzes ein Zwischenschritt eingeführt werden ($x \cdot y = (x-1) \cdot y + y$). Am Beispiel $21 \cdot 13$ rechnet man also $21 \cdot 13 = 20 \cdot 13 + 13 = 10 \cdot 26 + 13 = 5 \cdot 52 + 13 = 4 \cdot 52 + 65 = 2 \cdot 104 + 65 = 1 \cdot 208 + 65 = 273$.

Bei den als russische oder abessinische Bauernmultiplikation bekannten Verfahren schreibt man die Rechnung verkürzt auf.

$$\begin{array}{r}
 21 \quad 13 \\
 \hline
 \del{10} \quad \del{26} \\
 5 \quad 52 \\
 \hline
 \del{2} \quad \del{104} \\
 1 \quad 208 \\
 \hline
 273
 \end{array}$$

4. Ägyptische Multiplikation

Die Ägypter führten die Multiplikation auf das wesentlich einfachere wiederholte Verdoppeln zurück. Da sich nach dem Darstellungssatz für das Dualsystem jede Zahl eindeutig als Summe von Zweierpotenzen schreiben lässt, reicht es aus, einen der beiden Faktoren hinreichend oft zu verdoppeln. Das Schulbuch "Nussknacker 4" stellt das Verfahren historisch korrekt dar, bereitet es aber im Vergleich zu den Originalquellen didaktisch übersichtlicher auf. Eine mögliche Umsetzung in der Schule wird in Abbildung 2 dargestellt.

Ägyptische Multiplikation

$14 \cdot 23$

1 Man legt eine Tabelle mit zwei Spalten an und trägt in der linken Spalte die Zweierpotenzen 1, 2, 4, 8, ... ein.

Das Verdoppeln endet, wenn die Zweierpotenz größer ist als der Faktor 14.

2 Nun trägt man in die erste Zeile der zweiten Spalte den Faktor 23 ein und in den nächsten Zeilen jeweils das Doppelte.

3 Nun markiert man in der linken Spalte diejenigen Zweierpotenzen, die addiert den Faktor 14 ergeben...

4 ...und addiert die entsprechenden Zahlen der rechten Spalte.

$46 + 92 + 184 = 322$

1	23
2	46
4	92
8	184
16	Stopp

1	23
2	46
4	92
8	184
16	Stopp

Bild: Marc Widiger, Papyrus, Pyramide: Pixabay.com

Abb. 2: Ägyptische Multiplikation,

Grafik M. Widiger, Idee: Nussknacker 4, S. 99

In diesem Beispiel verwendet man also $14 = (1110)_2 = 8 + 4 + 2$ und berechnet somit $14 \cdot 23 = (8 + 4 + 2) \cdot 23 = 8 \cdot 23 + 4 \cdot 23 + 2 \cdot 23 = 184 + 92 + 46 = 322$.

5. Einsatz bei Studierenden des Lehramts an Grundschulen

In einer Prüfungsarbeit in Arithmetik mussten 130 Studierende zwei Multiplikationsaufgaben mit zwei verschiedenen Verfahren aus der Auswahl der vier Verfahren ägyptische Multiplikation, Gittermethode, Normalverfahren

und Verdopplungs-Halbierungs-Verfahren berechnen. Da das Normalverfahren bei den Studierenden im Normalfall automatisiert ist, waren die Rechnungen im Stellenwertsystem zur Basis 6 und 8 auszuführen, so dass keines der Verfahren automatisiert abgerufen werden konnte. Für jede Rechnung gab es maximal 3 Punkte.

	Anzahl	Punkte
Ägyptische Multiplikation	40	2,4
Gittermethode	83	2,7
Normalverfahren	110	2,6
Verdopplungs-Halbierungs-Verfahren	27	2,3

Bereits in Gesprächen im Rahmen von Vorlesung und Übung wurde das Gitterverfahren als das einfachste Verfahren eingeschätzt. Zu dieser Einschätzung der Studierenden passt das Prüfungsergebnis. Trotzdem wurde das vertraute Normalverfahren mit großem Abstand am häufigsten gewählt.

6. Zusammenfassung und Ausblick

Grundschullehrerinnen und -lehrer, mit denen wir zusammenarbeiten, haben uns bestätigt, dass die Gittermethode von ihren Schülerinnen und Schülern sehr gut angenommen wird, wobei im Normalfall auf die Kopiervorlagen zurückgegriffen wird, da das Zeichnen der Gitter zu aufwendig ist. Über die Frage, ob das Erlernen des Gitterverfahrens sich positiv auf das Normalverfahren auswirkt, gibt es noch keine verlässlichen Daten. Die ägyptische Multiplikation und das Verdopplungs-Halbierungs-Verfahren wurden zur Förderung begabter Grundschulkinder bereits erfolgreich eingesetzt. Beide Verfahren bieten viele Möglichkeiten für weiterführende mathematische Entdeckungen und Vertiefungen.

Literatur

- Padberg, F., Didaktik der Arithmetik, 2. Auflage, Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg Berlin Oxford 1996
- Nussknacker, Mein Mathebuch, Band 4, Hrsg. P. H. Maier, Ernst Klett Grundschulverlag GmbH, Leipzig 2005
- Mathematikus 4, Hrsg. J. P. Lorenz, Westermann Schulbuchverlag GmbH, Braunschweig 2002
- Das Zahlenbuch, Mathematik im 4. Schuljahr, Hrsg. E. Ch. Wittmann und G. N. Müller, Ernst Klett Grundschulverlag GmbH, Leipzig 2001