Denise LENZ, Halle an der Saale

Relationales Denken und das Umgehen mit Unbekannten. Eine qualitative Studie mit Vor-und Grundschulkindern

1. Relationales Denken

Kieran (2011) beschreibt als zentrale Themen algebraischen Denkens unter anderem: „thinking about the general in the particular“, „thinking relationally about quantity, number, and numerical operations“ und „thinking conceptually about the procedural“. Die beiden letztgenannten Aspekte greifen relationales Denken auf. Dies beschreibt das Erkennen und Nutzen von Beziehungen in Gleichungen, wobei mathematische Ausdrücke als Ganzes (statt als auszuführende Prozesse) analysiert werden, um Beziehungen für eine Lösungsfindung zu nutzen (vgl. Molina et al. 2009). Carpenter et al. (2005) bemerken dazu, dass relationales Denken ein erstes Verständnis für die Eigenschaften von Zahlen und Operationen voraussetzt, nicht aber dass diese bereits formal ausgedrückt werden müssen. Dies verdeutlicht, dass relationales Denken bereits in einem vorformalen Stadium möglich ist.

2. Umgehen mit Unbekannten- Variablenaspekte

Das Umgehen mit Unbekannten stellt einen weiteren wichtigen Aspekt algebraischen Denkens dar (vgl. Karpinski-Siebold, Kieran 2011). Da die folgend dargestellte Studie die Bereiche des relationales Denkens sowie des Umgehens mit Unbekannten miteinander vereint, wird an dieser Stelle kurz auf die Einteilung von Variablenaspekten nach Freudenthal (1973) eingegangen: Unbekannte: Die Variable wird in diesem Aspekt als spezifische Zahl verstanden, die sich eindeutig bestimmen lässt. Veränderliche: Die Variable als Veränderliche durchläuft durch sukzessive Einsetzung einen Zahlenbereich. Unbestimmte/ allgemeine Zahl: Die Variable trifft beispielsweise bei Rechengesetzen eine allgemeine Aussage. Die Aspekte der Unbekannten und der Unbestimmten sind hierbei als komplementär zueinander zu betrachten. Während Unbekannte da auftauchen, wo sich ein Wert eindeutig bestimmen lässt, treffen Unbestimmte eine allgemeine Aussage, ohne einzelne Werte zu spezifizieren (vgl. Akinwunmi 2012). Neben den oben genannten Variablenaspekten lassen sich noch weitere, empirisch gefundene Variablenvorstellungen angeben, die jedoch häufig auch Fehlvorstellungen abbilden. An dieser Stelle seien Quasi-Variable gesondert aufgeführt, da diese auch in der vorliegenden Studie eine Rolle spielen: Quasi-Variable beschreiben ebenso wie Variable als Unbestimmte allgemeine Zusammenhänge, jedoch unter zu Hilfenahme konkreter Zahlenbeispiele (vgl. Fuji & Stephens 2003).

In Institut für Mathematik und Informatik Heidelberg (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2016* (S. x–y). Münster: WTM-Verlag

3. Forschungsinteresse und methodisches Vorgehen

Studien zu relationalem Denken beziehen sich hauptsächlich auf formale Aufgabenstellungen, bezüglich Zahlen und Operationen innerhalb formaler Gleichungen. Schüler in Grundschulalter sind durchaus in der Lage, Beziehungen zwischen Zahlen und Operationen zu nutzen, um Gleichungen ohne ein prozedurales Ausrechnen zu lösen (vgl. u.a. Carpenter 2005, Steinweg 2004). Untersuchungen zum Äquivalenzverständnis 7 bis 11-Jähriger von Schliemann et al. (2013) zeigen auf, dass die Repräsentation unbekannter Mengen mittels Kisten und Murmeln ebenso Potentiale zum relationalen Denken bietet. Eine ähnliche Repräsentation verwendete Melzig (2013) und konnte zeigen, dass die entwickelte Lernumgebung „Knack die Box“ einen Beitrag zur Entwicklung von Variablenvorstellungen leisten kann. Die Repräsentation von Boxen und Murmeln aufgreifend, wurde ein Untersuchungsdesign entwickeln, welches es erlaubt, das Herstellen von Beziehungen zwischen bekannten und auch unbekannten Mengen bereits bei Grundschul-und Kindergartenkindern zu erfassen. In videographierten klinischen Interviews wurden Kindern des Kindergartens kurz vor Schuleintritt, Zweitklässlern sowie Viertklässlern eine Rahmengeschichte von zwei Kindern erzählt, die mit Murmeln spielen. Einige dieser Murmeln sind in unterschiedlich farbigen Boxen verpackt, wobei in Boxen der gleichen Farbe immer gleich viele Murmeln enthalten sind. Die insgesamt 12 Aufgabenitems wurden in ihrem Schwierigkeitsgrad und der Verwendung bekannter und unbekannter Werte so gewählt, dass bereits die Kindergartenkinder Zugang zu den Aufgaben finden. Abbildung 1 zeigt das Aufgabenitem C1, bei der erstmalig unbekannte Mengen in Form der beiden Boxen bei beiden Kindern auftauchen.

Abb. 1: Item C1 unter Verwendung zweier unbekannter Werte. „Wie viele Murmeln müssen in der grünen (linken) Kiste sein, damit beide Kinder gleich viele Murmeln haben?“

Die halbstandardisierten Interviewnachfragen geben einen Einblick in das kindliche Denken und ermöglichen den Kindern beispielsweise durch Angabe verschiedener Zahlenwerte eine andere Sicht auf die Kisten einzunehmen, welche die verschiedenen Variablenaspekte wiederspiegeln.

4. Ergebnisse

Nach Durchsicht der Daten ergaben sich durch deduktives und induktives Kategorienbilden unterschiedliche Ausprägungen hinsichtlich der beiden Konzepte des relationalen Denkens und des Umgehens mit den unbekann-

ten Mengen, welche sich wiederum in Beziehung zueinander bringen lassen. Die folgenden Beispiele beziehen sich auf das oben dargestellte Beispielitem C1.
Hinsichtlich der Frage, inwieweit Beziehungen zwischen den Mengen benannt werden, konnten drei unterschiedliche Ausprägungen festgestellt werden: (1) Es wird eine Beziehung zwischen den Mengen benannt. So sagt Lukas (4.Kl.): „In der grünen Kiste ist immer eine Murmel mehr, als in der orangen Kiste.“ (2) Es wird geäußert, dass zwischen den Mengen eine Abhängigkeit besteht, ohne diese jedoch zu spezifizieren. Die Viertklässlerin Katha sagt: „Es kommt darauf an, wie viele Murmeln in der orangen Kiste sind.“ (3) Es wird weder eine Beziehung genannt, noch eine Abhängigkeit zwischen den Werten in den beiden Kisten geäußert. Hierbei werden beispielsweise Werte für eine oder beide der Kisten geäußert, wie das Beispiel von Lena (2.Kl.) zeigt: „In der grünen Box sind drei Murmeln und in der orangen Box sind zwei Murmeln“. Hinsichtlich der Frage, wie die unbekannten Mengen aufgefasst werden, ließen sich die in der Literatur beschriebenen Variablenaspekte in den Äußerungen der Kinder erkennen. Diese wurden induktiv durch die Kategorien „Variablen als Unbestimmbar“ und „Variable als absolute Zahl“ angereichert. Die unbekannten Mengen werden gedeutet als: (A) Unbestimmte/ allgemeine Zahl: Hierbei lässt sich das bereits genannte Beispiel von Lukas anfügen: „In der grünen Kiste ist immer eine Murmel mehr, als in der orangen Kiste“. Er ist in der Lage die Anzahl der der Murmeln in der grünen Kiste als allgemeine Zahl aufzufassen und in Beziehung zur anderen Kiste anzugeben. (B) Quasi-Variable: Marcus (4.Kl.) sagt: „Wenn zum Beispiel in der Kiste von dem Mädchen vier Kugeln sind und dann rechnet man das plus eins und dann sind hier fünf, bei dem Jungen“. Der Unterschied zu A liegt hierbei nur darin, dass auf Zahlenbeispiele zurückgegriffen wird, die jedoch die ebenso die Beziehung beschreiben. (C) Veränderliche: Anton (4.Kl.) beschreibt „Es gibt, da gibt’s verschiedene Möglichkeiten, weil ich hier (orange Kiste) nicht weiß, was da drinne ist“. Er erkennt, dass beide Werte voneinander abhängen und kann im Anschluss auch verschiedene Zahlenpaare angeben. (D) absolute Zahl: hierbei werden konkrete Zahlenwerte genannt, ohne sie in Beziehung zu einander zu setzen, wie Clara (Kindergarten) „Vier, weil die Box ist so klein, da passen nur vier Murmeln rein“. (E) Unbestimmbare: die Kinder beschreiben hierbei, dass sich die Anzahl der Murmeln nicht bestimmen lässt, wie Axel (2.Kl.) „Ich bin ja kein Hellseher“.
Bringt man beide Auswertungsdimensionen - das Herstellen von Beziehungen und den Variablenumgang - zusammen, so ergibt sich folgende Übersicht, die verdeutlicht, wie beide Aspekte algebraischen Denkens zusammenhängen:

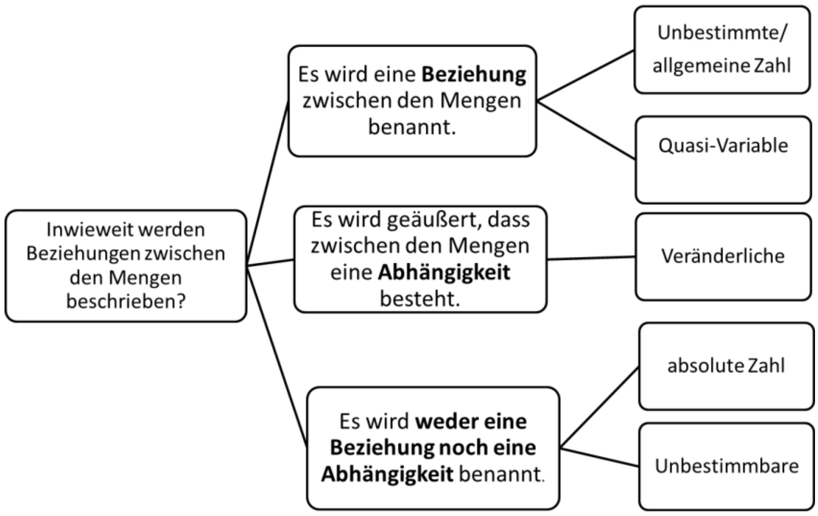

Abb.2: Das Herstellen von Beziehungen zwischen unbekannten Mengen und die damit verbundenen möglichen Deutungen dieser unbekannten Mengen.

Literatur

Akinwunmi, K. (2012). Zur Entwicklung von Variablenkonzepten beim Verallgemeinern mathematischer Muster (Vol. 7). Springer-Verlag.

Carpenter, T.P., Levi, L., Franke, M.L., & Zeringue, J.K. (2005). Algebra in elementary school: Developing relational thinking. Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 37(1), 53-59.

Fujii, T., & Stephens, M. (2001). Fostering an understanding of algebraic generalisation through numerical expressions: The role of quasi-variables. In Proceedings of the 12th ICMI Study Conference: The Future of the teaching and learning of algebra (Vol. 1, pp. 258-264).

Freudenthal, H. (1973). Mathematik als pädagogische Aufgabe. Band 1. Stuttgart: Klett

Kieran, C. (2011). Overall commentary on early algebraization: Perspectives for research and teaching. In Early algebraization (pp. 579-593). Springer Berlin Heidelberg.

Melzig, D. (2013). Die Box als Stellvertreter: Ursprüngliche Erfahrungen zum Variablenbegriff (Doctoral dissertation, Duisburg, Essen, Universität Duisburg-Essen, Diss., 2013).

Molina, M., Ambrose, R., Castro, E. & Castro, E. (2009). Breaking the addition addiction: Creating the conditions for knowing-to act in early algebra. In S. Lerman & B.Davis (Eds.), Mathematical Action & Structures of noticing: studies inspired by John Mason (pp. 121-134). Rotterdam, The Netherlands: Sense Publisher.

Schliemann, A. D. (2013). Bringing out the algebraic character of arithmetic: From children's ideas to classroom practice. Routledge.

Steinweg, A. S. (2004). Why 25+4 might be 54. Children’s Interpretations of Uncompleted Equations. URL: https://www.uni-baberg.de/fileadmin/uni/fakultaeten/ppp_professuren/mathematik_informatik/DateieD/steinwegICME.pdf