Andreas LINDNER, Linz

Differential- und Integralrechnung mit GeoGebra3D

Im Lehrplan für Mathematik in der Sekundarstufe 2 der allgemein bildenden höheren Schulen in Österreich ist unter den didaktischen Grundsätzen das Lernen mit technologischer Unterstützung verpflichtend vorgeschrieben (BMBF 2004). Ab dem Jahr 2018 wird auch die zentrale Abschlussprüfung unter Verwendung von PC, Notebooks oder Taschencomputern, die ein bestimmtes Mindestmaß an Anforderungen erfüllen müssen, geschrieben.

Neben den verschiedenen Funktionen des Technologieeinsatzes im Mathematikunterricht wie die Verwendung als Experimentier-, Modellier- oder als Rechenwerkzeug, spielt das Visualisieren eine zentrale Rolle (BIFIE 2011, S. 73f). Aus diesem Grund sollen ein paar Anregungen aus dem Bereich der Differential- und Integralrechnung vorgestellt werden, die eine hilfreiche Unterstützung im Lernprozess sein können.

Einige der Beispiele bewegen sich am oberen Ende der in Schulen vermittelten Lehrinhalte und können auch als Unterstützung beim Studium von angehenden Lehrkräften eingesetzt werden.

Alle Beispiele finden sich in dem GeoGebraBook Differential- und Integralrechnung mit GeoGebra3D unter http://tube.geogebra.org/b/2362601. Die Leserinnen und Leser sind eingeladen, die Materialien kostenfrei als Download zu beziehen oder direkt online zu erproben. Viele Arbeitsblätter entwickeln ihre ganze Wirkung erst in der Dynamik der Veränderung und diese kann hier nur unzureichend in allen Einzelheiten erklären werden. Aufgrund der vorgegebenen Kürze der Ausführungen ist auch eine Beschreibung der verfügbaren Materialien in allen Details nicht möglich.

Differentialrechnung

Differentialrechnung wird traditionell in der Schulmathematik nur mit Funktionen in einer Variablen betrieben. Die Möglichkeiten für Visualisierungen im Raum im Zusammenhang mit Differentialrechnung sind demnach relativ spärlich gesät, einige Anwendungen bieten sich dennoch an.

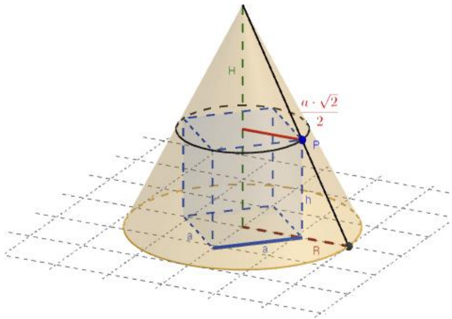

Abbildung 1: Kegel und Quader

Ein Standardbeispiel für Optimierungsaufgaben ist die bekannte Aufgabe, bei der einem Kegel ein Quader mit quadratischer Grundfläche eingeschrieben werden soll, das ein möglichst großes Volumen hat (vgl. Abb.1). Hier eignet sich das 3D-Modul von GeoGebra nicht nur zum Visualisieren des Sachverhalts, sondern bietet auch die Möglichkeit zum Experimentieren und Interpretieren. Mit Multiple Choice-Abfragen und offenen Fragestellungen können die Rückmeldungen der Lernenden gesammelt werden. Je nach Einstellung haben die Schülerinnen und Schüler auch die Möglichkeit, ihre Antworten sofort selbst in einem Selbstcheck zu überprüfen.

Im Zusammenhang mit der Statistik lässt sich der Einsatz der Differentialrechnung am Beispiel der Regressionsgeraden aufzeigen. Für eine bestimmte Anzahl von Daten – geometrisch als Punkte dargestellt – soll die Regressionsgerade ermittelt werden. Das ist jene Gerade mit Steigung k und Achsenabschnitt d, für die die Summe der quadratischen Abstände minimal ist. Damit kann eine Optimierungsaufgabe für eine Funktion in zwei Variablen formuliert und im 3D-Modul mit Hilfe von einer entsprechenden Fläche und der Tangentialebene in einem Punkt visualisiert werden (vgl. Abb. 2).

Das Applet ersetzt natürlich nicht die Herleitung der Formel für die Berechnung einer Regressionsgerade, es kann aber die Begründung für eben diese Berechnung besser verständlich machen. Außerdem ist es ein Beispiel für das Zusammenspiel von Grafik 3D-Fenster und einem zweidimensionalen Grafik-Fenster, wobei die zweidimensionale Darstellung nicht einfach der Grundriss der dreidimensionalen ist.

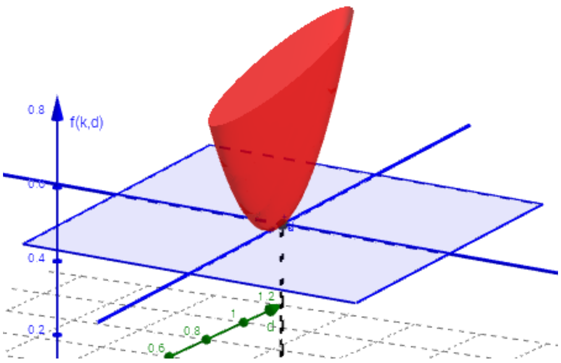

Abbildung 2: Regressionsgerade

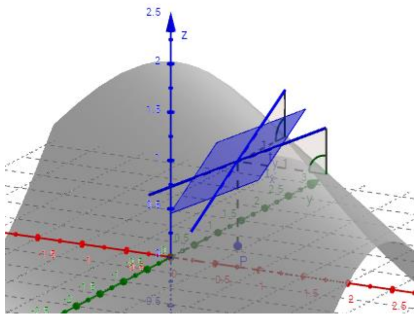

Abbildung 3: Tangentialebene

Tangentialebenen können sehr vielfältig für Veranschaulichungen (vgl. Abb. 3) herangezogen werden und bieten ein geeignetes Werkzeug zum Experimentieren mit verschiedenen Flächen. Dies sollen die Beispiele zu *Tangentialebene an eine Fläche* und *Richtungsableitung* zeigen. Hier sind die Anwender aufgefordert, das Verhalten von Tangentialebene und Tangenten in verschiedene Richtungen an den Graphen von beliebigen Funktionen zu erforschen.

Integralrechnung

Die Intention beim Einsatz von bereits vorgefertigten Applets im Zusammenhang mit der Integralrechnung liegt in der Erwartung, dass das Verständnis für das Zustandekommen der verwendeten Formeln bei der Berechnung von Volumina von Körpern erhöht werden kann. Visualisierungen bieten auch eine praktischen Vorteil: Viele Zeichnungen und Skizzen sind sehr zeitaufwändig und manchmal auch zu umfangreich, um in einer Unterrichtseinheit von den Lernenden angefertigt zu werden. Anstelle des Betrachtens einer statischen Zeichnung in einem Lehrbuch tritt nun die Beschäftigung mit einer dynamischen Darstellung, die so oft wie möglich mit einem konkreten Arbeitsauftrag verbunden sein soll.

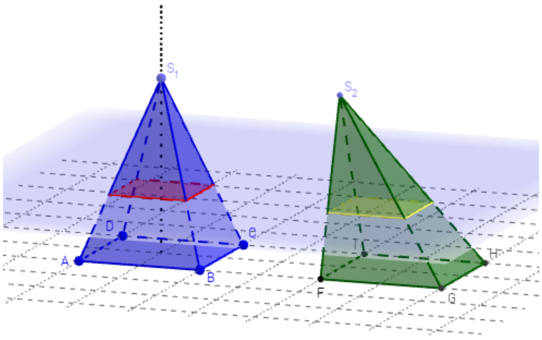

Abbildung 4: Prinzip von Cavalieri

Das erste Applet im Abschnitt *Integralrechnung* zeigt eine Veranschaulichung des Prinzips von Cavalieri: Zwei Körper, deren Schnittfläche in jeder beliebigen Höhe denselben Flächeninhalt besitzen, haben dasselbe Volumen. Im Applet werden eine gerade und eine schiefe vierseitige Pyramide für die Visualisierung verwendet. Gleichzeitig werden die Werte für beide Flächeninhalte der Schnittflächen angezeigt. Hier liegt aber auch eine Gefahr für eine unreflektierte Verwendung der Veranschaulichung: In der Praxis hat sich gezeigt, dass Lernende eine Übereinstimmung der Flächeninhalte für einige wenige Werte als ausreichenden Beweis für die Gleichheit der Volumina angesehen haben.

Bei den Beispielen *Volumen einer Pyramide*, *Dom zu Speyer*, *Volumen eines Staudamms* und *Rotationsvolumen* soll in weitere Folge gezeigt werden, wie durch die Berechnung einer endlichen Summe der Volumina von Quadern bzw. Prismen das Volumen eines Körpers immer besser angenähert werden kann. Es geht also darum zu veranschaulichen, dass ein bestimmtes Integral näherungsweise als Summe von Produkten aufgefasst werden kann.

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_n f(x_n)\cdot\Delta x$$

Die Benutzer sollen bei der Beschäftigung mit dem Applet unmittelbar erleben, dass sich bei einer Erhöhung der Anzahl n der Unterteilungen der Wert der endlichen Summe immer mehr einem bestimmten Wert annähert.

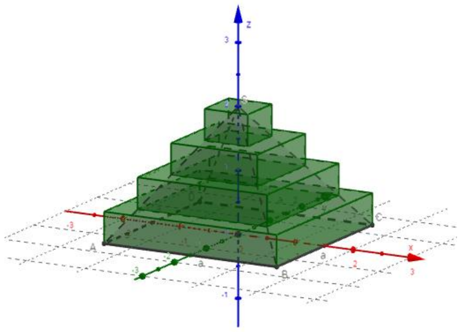

Abbildung 5: Pyramide

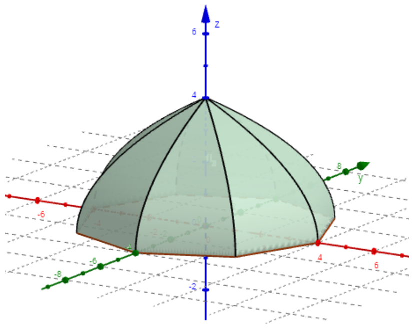

Abbildung 6: Dom zu Speyer

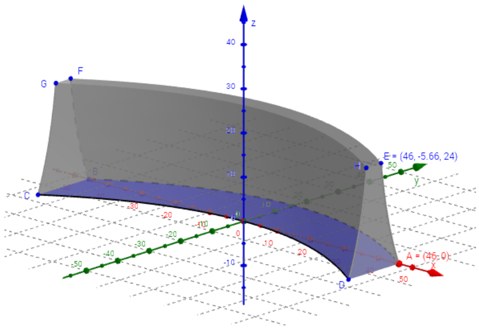

Abbildung 7: Staudamm

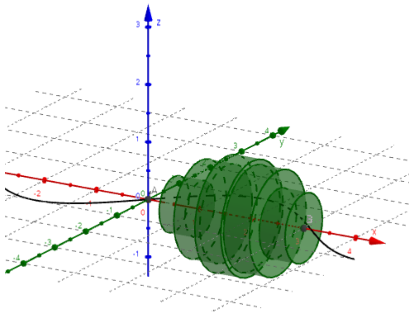

Abbildung 8: Rotationsvolumen

Eine weitere Hilfe für die Vorstellung, welches Aussehen ein Körper hat, der durch die Rotation eines Funktionsgraphen um die x- oder y-Achse entsteht, bietet das Applet *Volumen von Rotationskörpern*. Ein Benutzer kann in einem Eingabefeld die darzustellende Funktion und die Grenzen für die Berechnung bzw. Darstellung eingeben.

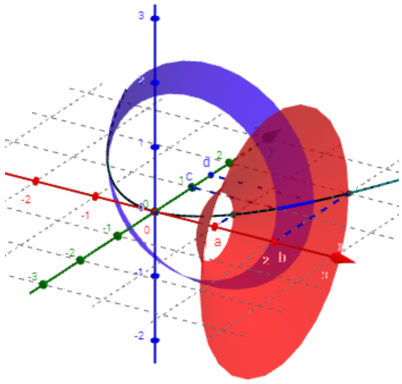

Abbildung 9: Rotationskörper

Wurde dynamische Geometrie mit GeoGebra bisher vor allem für ebene Problemstellungen herangezogen, so ist nun auch die Erweiterung auf 3D im System integriert. Gerade im Zusammenspiel mit dem zweidimensionalen Grafikfenster und dem CAS-Fenster ergeben sich viele neue Möglichkeiten, den Mathematikunterricht zu bereichern.

Literatur

BIFIE (Hrsg.) (2011). Praxishandbuch Mathematik AHS Oberstufe. Auf dem Weg zur standardisierten kompetenzorientierten Reifeprüfung, Teil 1. Graz: Leykam.

BMBF (Bundesministerium für Bildung und Frauen) (2004). Lehrplan Mathematik. https://www.bmbf.gv.at/schulen/unterricht/lp/lp_neu_ahs_07_11859.pdf. Zugriff am 1.3.2016

Lindner, A. (2016). Differential- und Integralrechnung mit GeoGebra3D. http://tube.geogebra.org/b/2362601. Zugriff am 1.3.2016