

Renate NITSCH, Felix JOHLKE, Darmstadt

Stabilität von Fehlermustern bei funktionalen Zusammenhängen

Im Projekt CODI (COncceptual DIfficulties in the field of functional relationships) wurden konzeptuelle Lernschwierigkeiten von Schülerinnen und Schülern im Bereich funktionaler Zusammenhänge erforscht. Hierzu wurde ein Diagnoseinstrument entwickelt, das typische Fehlermuster bei Darstellungswechseln zu linearen und quadratischen Funktionen erfasst. Dabei wurden der graphisch-algebraische (GA), der situativ-algebraische (SA) und der graphisch-situative (GS) Darstellungswechsel mit einbezogen. Im Haupttest konnten neun Fehlermuster identifiziert werden, die bei jeweils über 10% der Lernenden aufgetreten sind (Nitsch, 2015). Um die Stabilität dieser Fehlermuster zu überprüfen, wurde nach einem halben Jahr in einem Nachtest das Diagnoseinstrument erneut eingesetzt.

Design

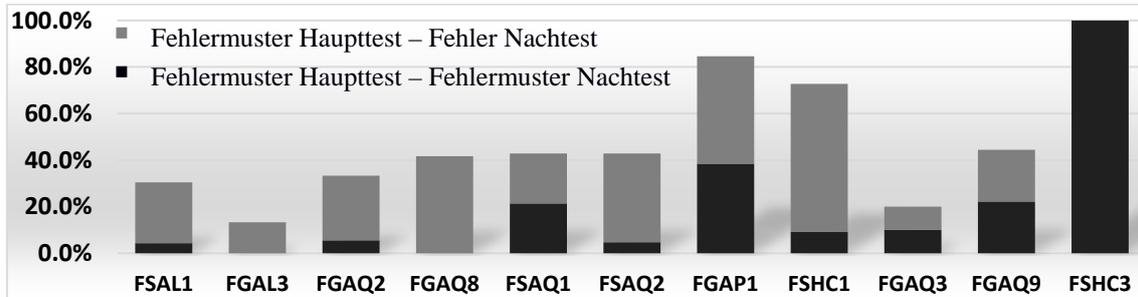
Das Diagnoseinstrument wurde als Online-Tool entwickelt mit dem Ziel einer automatischen Auswertung, um es flexibel im Unterricht einsetzen zu können. Es kamen vor allem Multiple-Choice-Aufgaben zum Einsatz. Diese haben das Format „1 von 4“, wobei möglichst viele Distraktoren für typische systematische Fehler stehen. Es wurden mehrere strukturell gleiche Aufgaben entwickelt, um Fehlermuster aufdecken zu können. Nur dann, wenn sich ein systematischer Fehler über mehrere Aufgaben hinweg in einem konsistenten Fehlermuster zeigt, wird eine dahinterliegende Fehlvorstellung vermutet. Im Nachtest kamen 24 Aufgaben zum Einsatz. Die Stichprobe bestand aus 11 Klassen aus drei südhessischen Gymnasien mit insgesamt $N=168$ Schülerinnen und Schülern. Zwischen dem Haupttest und dem Nachtest fand ein Schuljahreswechsel statt. In beinahe allen Klassen wurden die Themen lineare und quadratische Funktionen kurz vor der Durchführung des Nachtests wiederholt.

Ergebnisse

Insgesamt haben sich die Lernenden bezüglich der Lösungshäufigkeiten der Aufgaben erwartungsgemäß stark verbessert. Lediglich im Bereich des graphisch-situativen Darstellungswechsels zeigt sich keine Verbesserung. Die Aufgaben zu diesem Darstellungswechsel fokussieren zwei typische Fehlvorstellungen in diesem Bereich, die sich als besonders stabil erweisen.

Eine Auswertung der Fehlermuster auf Schülerebene ergab, dass zwei Fehlermuster bei über 20% der Lernenden, die das Fehlermuster im Haupttest

gezeigt haben, erneut auftraten. Wird ein weniger strenges Kriterium angelegt, indem der Anteil derjenigen Lernenden betrachtet wird, die das Fehlermuster im Haupttest gezeigt haben und den Fehler noch mindestens einmal im Nachtest zeigten, steigen die Prozentzahlen noch einmal deutlich an (siehe hellgrauer Bereich in Abb. 1). Drei Fehlermuster sind dabei besonders auffällig.



Darstellungswechsel	Code	Fehlermuster
SA - lineare Funktionen	FSAL1	Verwechslung von Steigung und y-Achsenabschnitt
GA - lineare Funktionen	FGAL3	Fokus auf Schnittpunkte mit den Achsen
GA - quadratische Funktionen	FGAQ2	Vorzeichenfehler bei Verschiebung in x-Richtung
GA - quadratische Funktionen	FGAQ8	Stauch- bzw. Streckfaktor a nicht berücksichtigt
SA - quadratische Funktionen	FSAQ1	Falsches Einsetzen der Koordinaten des Scheitelpunkts
SA - quadratische Funktionen	FSAQ2	Vorzeichenfehler bei Verschiebung in x-Richtung
GS - Fokus Fehlvorstellung	FGAP1	Graph-als-Bild-Fehler
GS - Fokus Fehlvorstellung	FSHC1	Slope-height-Fehler
GA - quadratische Funktionen	FGAQ3	Falsche Verwendung der Scheitelpunktskoordinaten
GA - quadratische Funktionen	FGAQ9	Vorzeichenfehler bei Verschiebung in x-Richtung
GS - Fokus Fehlvorstellung	FSHC3	Alternative Form des Graph-als-Bild-Fehlers

Abb. 1: Auswertung der Fehlermuster 1

Der „Slope-height-Fehler“ (FSHC1) besteht darin, dass die Lernenden beim Vergleich verschiedener Geraden in einem Weg-Zeit-Diagramm zu einem bestimmten Zeitpunkt diejenige Gerade auswählen, die an der Stelle den maximalen Funktionswert besitzt (Fahrzeug 2 in Abb. 2). Auf die Steigung der Geraden achten die Lernenden dabei nicht, weshalb man auch von einer Verwechslung von Steigung und Höhe spricht. Im Haupttest des Projekts CODI hat sich gezeigt, dass in einer weiteren Aufgabe, in welcher nicht nach einem Zeitpunkt, sondern einem Zeitraum gefragt wurde, die

¹ Bei den ersten acht Fehlermustern handelt es sich um diejenigen Fehlermuster, die im Haupttest besonders häufig aufgetreten sind, bei den anderen drei Fehlermustern handelt es sich um Fehlermuster, die zwar im Haupttest nicht besonders häufig aufgetreten sind, sich aber im Nachtest dennoch als besonders stabil erwiesen.

meisten Lernenden die korrekte Antwort geben können. Die globale Unterscheidung zwischen der Höhe (also des Funktionswerts) und der Steigung einer (hier: linearen) Funktion scheint den meisten Lernenden möglich. Problematisch scheint allerdings die Bestimmung der Steigung an einem Punkt. Es handelt sich hierbei um eine epistemologische Hürde, die ein Großteil der Schülerinnen und Schüler im Laufe des Lernprozesses überwinden muss. Dies wird auch durch den Nachtest bestätigt. Während 43% der Schülerinnen und Schüler, die den Slope-height-Fehler im Haupttest gezeigt haben, ihn im Nachtest erneut zeigen, haben 45% der Schülerinnen und Schüler im Nachtest das korrekte Ergebnis angeben können und damit die Hürde überwunden.

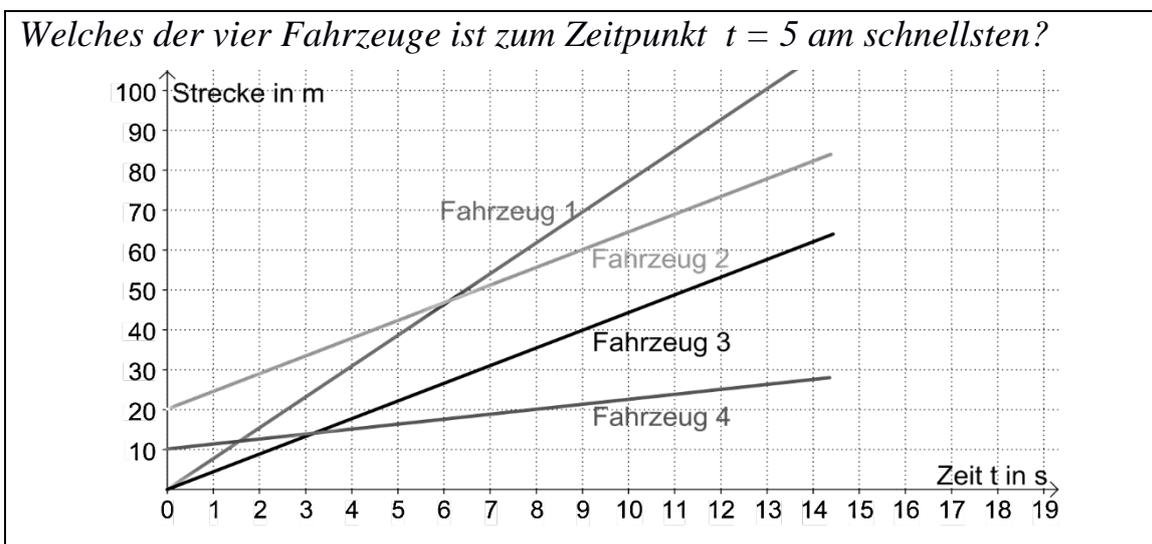


Abb. 2: Aufgabe zum Slope-height-Fehler

Der Graph-als-Bild-Fehler (FGAP1) entsteht aus der Interpretation eines Graphen als reales Situationsabbild. So wird beispielsweise in der Skifahreraufgabe (Nitsch, 2015), in welcher nach dem Geschwindigkeitsverlauf eines Skifahrers gefragt ist, derjenige Graph ausgewählt, der dem Höhenprofil des Hangs am ähnlichsten ist. Durch die Auswertung der diagnostischen Interviews wurde deutlich, dass das Fehlermuster FSHC3, das 100% der Lernenden, die es im Haupttest zeigten, auch im Nachtest gezeigt haben, auch auf diese Fehlvorstellung zurückführbar ist. In der Aufgabe zum Slope-height-Fehler entspricht dieses Fehlermuster der Antwort Fahrzeug 4. Diejenigen Lernenden, die diese Antwortalternative gewählt haben, deuteten die Situation folgendermaßen: „Ich denke Läufer 4 ist am schnellsten, da er am ebensten ist und somit die schnellste Geschwindigkeit laufen kann, da es bergauf einfach langsamer geht.“ Beim Graph-als-Bild-Fehler handelt es sich demnach um ein besonders stabiles Phänomen.

Neben der Stabilität der Fehlermuster wurde das Antwortverhalten derjenigen Schülerinnen und Schüler analysiert, die im Haupttest korrekt antwor-

teten und im Nachtest ein Fehlermuster zeigten (sich also demnach verschlechterten). Dies war besonders häufig im Bereich des situativ-algebraischen Darstellungswechsels bei linearen Funktionen (64,6%) und beim graphisch-situativen Darstellungswechsel bei den Aufgaben zum Graph-als-Bild-Fehler (43,4%) der Fall. In diesen Bereichen handelt es sich um eine besonders intuitive Form der Fehlermuster (Wittmann, 2009). Einen Erklärungsansatz liefert die Conceptual Change Theorie (Vosniadou, 2008). Demnach werden die intuitiven Vorstellungen nicht von den mathematisch korrekten Vorstellungen abgelöst, sondern bestehen simultan. Die Schülerinnen und Schüler müssen lernen, wann sie welche Vorstellung aktivieren. Hier liegt die Vermutung nahe, dass die Lernenden die Vorstellungen nicht ausreichend miteinander verknüpft haben und sich die intuitiven Vorstellungen nach einem längeren Zeitraum als robuster erweist.

Die Auswertung der Fehlermuster hat neben der Identifikation besonders stabiler Fehlermuster auch ergeben, dass einige Fehlermuster nicht erneut auftraten. Beispielsweise bestand ein im Haupttest besonders typisches Fehlermuster (FGAL3) darin, dass die Lernenden statt der Steigung den x-Achsenabschnitt als Parameter m in die Funktionsgleichung der linearen Funktion $y=mx+b$ einsetzten (26%). Dieser Fehler ist als Fehlermuster im Nachtest nicht mehr aufgetreten, sodass hier eine Strategie zugrunde zu liegen scheint, die sich nicht als stabil erweist.

Ausblick

In einem nächsten Schritt sollen unter Berücksichtigung des Conceptual Change Ansatzes Interventionsmaßnahmen entwickelt und erprobt werden, die eine individuelle Förderung und Überwindung der diagnostizierten Fehlvorstellungen zum Ziel haben. Das entwickelte Diagnoseinstrument inkl. einer vorläufigen Feedbackversion lässt sich unter www.codi-test.de abrufen.

Literatur

- Nitsch, Renate (2015). *Diagnose von Lernschwierigkeiten im Bereich funktionaler Zusammenhänge. Eine Studie zu typischen Fehlermustern bei Darstellungswechseln*. Wiesbaden: Springer Spektrum.
- Vosniadou, Stella (2008), Hrsg. *International Handbook of Research on Conceptual Change*. 1. Aufl. Educational Psychology Handbook Series. New York und London: Routledge, Taylor & Francis.
- Wittmann, Gerald (2012). Zur Konsistenz von Fehlermustern in der Bruchrechnung. Ergebnisse einer empirischen Studie. In *Beiträge zum Mathematikunterricht 2012 Digital. Vorträge auf der 46. Tagung für Didaktik der Mathematik 2*. S. 945-948. URL: http://www.mathematik.uni-dortmund.de/ieem/bzmu2012/files/BzMU12_0027_Wittmann.pdf