Roland RICHTER, Linz

Darstellungsformen von funktionalen Abhängigkeiten und Funktionen

Eine Funktion als abstraktes mathematisches Modell muss in konkreter Weise dargestellt werden. In der Literatur sind die vier Darstellungsformen Term, Graph, Tabelle und Situation üblich. Unterscheidet man aber präzise zwischen „funktionaler Abhängigkeit“ und „Funktion“, ergeben sich weitere Darstellungen. Ich zeige einige Möglichkeiten anhand konkreter Beispiele zum Thema Winkelfunktionen auf. Diese nicht an Text gebundenen Darstellungsformen erlauben es, Funktionen anschaulich zu vermitteln.

Funktionen und funktionale Abhängigkeiten sind wesentlicher Bestandteil des Mathematikunterrichts. Die Unterscheidung zwischen den beiden Begriffen „Funktion“ und „funktionale Abhängigkeit“ wird gelegentlich vernachlässigt, kann aber sehr wohl präzisiert werden. Ein funktionaler Zusammenhang ist in einen konkreten Kontext der realen Welt eingebettet; dagegen ist „die Funktion ein abstraktes mathematisches Modell, das verschiedene Zusammenhänge in unterschiedlichen Kontexten beschreiben kann“ (Büchter, 2008, S. 5).

Eine Funktion als abstraktes Objekt muss in einer konkreten Weise dargestellt werden. Üblich ist die Unterscheidung von vier Darstellungsformen. Hußmann und Laakmann (2011) etwa sprechen von „Term, Graph, Tabelle und Situation“; Leuders und Naccarella (2011) nennen die vier Darstellungsformen situativ, grafisch, symbolisch/algebraisch und tabellarisch/numerisch; und so weiter.

Während Term, Graph und Tabelle jeweils Darstellungen einer Funktion sind, ist die situative Darstellungsform aber streng genommen die Beschreibung einer funktionalen Abhängigkeit. Wenn man präzise zwischen funktionaler Abhängigkeit und Funktion unterscheidet, müsste man nicht genauso präzise zwischen deren Darstellungen unterscheiden?

Spinnt man diesen Gedanken weiter, ergeben sich sowohl für Funktionen als auch für funktionale Abhängigkeiten mehrere Darstellungsformen. Ich möchte diese Repräsentationsformen im Folgenden am Beispiel von Winkelfunktionen sowie anhand einer konkreten Situation, dem Riesenrad, aufzeigen.

In Institut für Mathematik und Informatik Heidelberg (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2016* (S. x–y). Münster: WTM-Verlag

Ein Schulbuch (Mistlbacher, Lechner, Nussbaumer, Dorfmayr & Brand, 2013) entwickelt den Begriff der Polarkoordinaten und in weiterer Folge die Definitionen von Sinus und Cosinus mit folgendem Beispiel: „Das Wiener Riesenrad: Stell dir vor, du beobachtest eine Gondel dabei, wie sie sich langsam gegen den Uhrzeigersinn dreht. [...] Wo befindet sich die Gondel?“ (Mistlbacher et al., 2013, S. 152). Im Schulbuch wird die Vorstellungskraft zwar auch durch ein Foto unterstützt; im Wesentlichen wird die konkrete Situation Riesenrad hier aber verbal dargestellt.

Die obige Unterscheidung zwischen funktionalem Zusammenhang einerseits und Funktion andererseits führt allerdings dazu, dass auch der Begriff *verbale Darstellung* zweierlei bedeuten kann: einerseits die Beschreibung einer Situation mit eingebetteter funktionaler Abhängigkeit („stell dir vor, du steigst in ein Riesenrad ein ...“); andererseits aber die Beschreibung einer Funktion in einer innermathematischen Sprache („eine Sinusfunktion mit Periode ...“); vgl. etwa Dreher (2013). Ich schlage für ersteres, also die verbale Beschreibung einer Situation, den Begriff *Erzählung* vor.

Dem Gedankenexperiment könnte man hier auch ein ganz reales Experiment gegenüber stellen: Riesenrad-Modelle gibt es etwa aus Holz, aus Metall oder aus Kunststoff. Mehrere Experimente mit dem Modell *Super Fun Park* von Fischertechnik habe ich in (Richter, 2015) beschrieben. Inwieweit es für den Mathematikunterricht sinnvoll ist, den damit verbundenen Aufwand auf sich zu nehmen, sei dahin gestellt. Wichtig für meine Überlegungen hier ist nur, dass es möglich ist, einige derartige Situationen als „angreifbare“ Modelle nachzubauen.

Kann man eine Situation nicht derart nachbauen, ist es eventuell möglich, die Situation zu filmen und einen Videoclip zu erstellen. Als Beispiel erwähne ich hier den Clip „Ferris Wheel“ von Dan Meyer (2013). Dieser Videoclip zeigt ein stilisiertes Riesenrad mit acht Gondeln – eine davon rot –, sowie eine mitlaufende Uhr. Nach etwa 17 Sekunden ist der Clip zu Ende: „How many complete spins do you think the red car will take on its ride?“. Im Wesentlichen wird hier dieselbe Situation wie im oben erwähnten Schulbuch dargestellt, nur in anderen Form: eben als kurzer Videoclip.

Als letzte Art, eine Situation zu repräsentieren, erwähne ich die Möglichkeit, eine Simulation zu erstellen. Hier haben sich durch Werkzeuge wie GeoGebra in den letzten Jahren viele neue Möglichkeiten aufgetan. Eine Suche nach „Riesenrad“ bzw. „ferris wheel“ auf GeoGebraTube ergibt Dutzende Treffer. Als Beispiel führe ich hier das interaktive Arbeitsblatt „Riesenrad“ (Burninger, 2014) an.

Diese Darstellungsart hat gegenüber anderen den Vorteil, dass sie Interaktion ermöglicht. Im erwähnten Arbeitsblatt „Riesenrad“ kann man beispielsweise mit Schiebereglern den Durchmesser des Riesenrads sowie die Höhe des Drehpunkts verstellen. So ist es möglich, die Auswirkung der Änderung dieser Parameter direkt im Graphen zu beobachten – eine Möglichkeit, die sich so in keiner anderen Darstellungsform bietet.

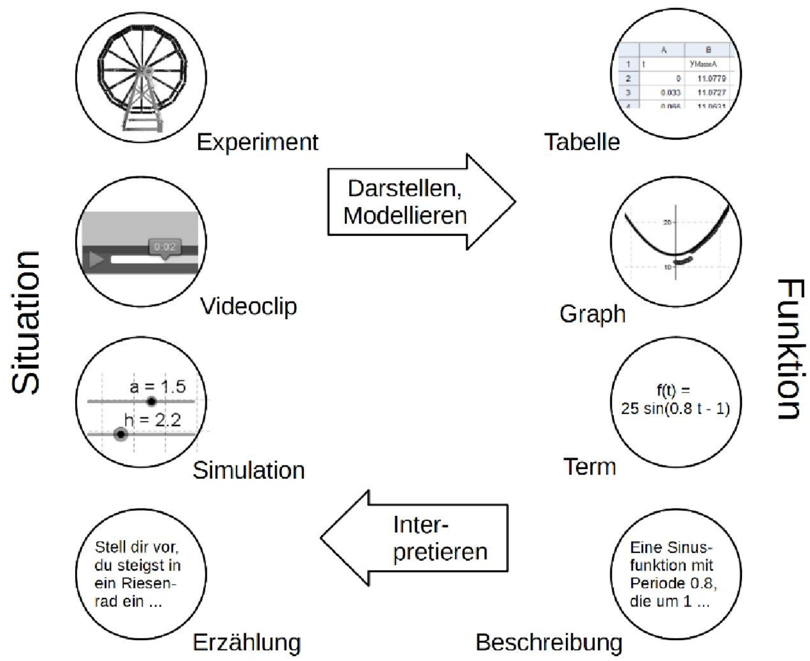

Abbildung 1. Darstellungsformen von Situationen und Funktionen

Eine Situation zusammen mit der darin enthaltenen funktionalen Abhängigkeit lässt sich vielfältig darstellen. Ich habe hier anhand von Beispielen vier grundlegend verschiedene Möglichkeiten beschrieben, nämlich die Darstellung als Experiment, als Videoclip, als Simulation und als Erzählung. Mit etwas Phantasie ließen sich sicher noch weitere Darstellungsformen finden.

Es liegt nahe, diese vier Darstellungsformen von Situationen mit den oben besprochenen und in der Literatur weit verbreiteten vier Repräsentationen von Funktionen zu kombinieren. Das Ergebnis ist das erweiterte Modell in Abbildung 1. Verbunden werden diese zwei mal vier Darstellungsformen durch entsprechende Handlungsformen.

Um eine reale Situation, die durch ein Experiment, einen Videoclip, eine Simulation oder eine Erzählung repräsentiert ist, in eine der vier möglichen mathematischen Darstellungen zu überführen, benötigt es Kompetenzen aus dem Bereich Darstellen und Modellbilden. Umgekehrt müssen diese verschiedenen mathematischen Darstellungsformen auch wieder als Aussagen über eine reale Situation gedeutet werden können, verlangen also nach Kompetenzen aus dem Bereich Interpretieren.

Ich schlage dieses Modell vor, um einerseits die Unterscheidung zwischen funktionaler Abhängigkeit versus Funktion präziser zu fassen; andererseits und vor allem aber auch, um dem Experiment, dem Videoclip und der Simulation einen sichtbareren Platz einzuräumen. Diese drei nicht an Text gebundenen Darstellungsformen erlauben es meiner Meinung nach besser als die Erzählung, von der Anschauung zur Theorie zu gelangen und so funktionale Zusammenhänge erlebbar zu machen.

Literatur

Burninger (2014). Riesenrad. Verfügbar unter: http://tube.geogebra.org/student/m255667.

Büchter, A. (2008). Funktionale Zusammenhänge erkunden. *mathematik lehren*, (148), 4–10.

Dreher, A. (2013). Den Wechsel von Darstellungsformen fördern und fordern oder vermeiden? In J. Sprenger, A. Wagner & M. Zimmermann (Hrsg.), *Mathematik lernen, darstellen, deuten, verstehen* (S. 215–225). Wiesbaden: Springer Spektrum.

Hußmann, S. & Laakmann, H. (2011). Eine Funktion – viele Gesichter: Darstellen und Darstellungen wechseln. *Praxis der Mathematik in der Schule*, (38), 2–11.

Leuders, T. & Naccarella, D. (2011). „Zeichne, was du denkst – erkläre, was du zeichnest“. *Praxis der Mathematik in der Schule*, (38), 20–26.

Meyer, D. (2013). Ferris wheel. Verfügbar unter: http://www.101qs.com/2450-ferris-wheel.

Mistlbacher, A., Lechner, J., Nussbaumer, A., Dorfmayr, A. & Brand, C. (2013). *Thema Mathematik 5*. Linz: Veritas.

Richter, R. (2015). *Funktionen erlebbar machen* (Diplomarbeit). Johannes Kepler Universität Linz.